МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Кафедра «Вища математика»

До друку
Перший проректор ________ Б. Є. БОДНАР
"____" ________2012

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Методичні вказівки до виконання модульної роботи № 7

У двох частинах

Частина 1

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Укладачі: В. М. Кузнецов
Т. М. Бусарова
О. В. Звонарьова
Т. А. Агошкова

Для студентів II курсу всіх спеціальностей усіх форм навчання

Дніпропетровськ – 2013

УДК 519.21 (075.8)

Укладачі:
Кузнецов Віталій Миколайович
Бусарова Тетяна Миколаївна
Звонарьова Ольга Віталіївна
Агошкова Тетяна Анатоліївна

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Ф. Бабенко* (ДНУ ім. О. Гончара)
д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. О. Пічугов* (ДІІТ)

Теорія ймовірностей [Текст] : методичні вказівки до виконання модульної роботи № 7 : у 2 ч. / уклад. : В. М. Кузнецов, Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Т. А. Агошкова; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2013. – Ч. 1. Випадкові події. – 46 с.

Містять теоретичний матеріал з розділу «Випадкові події» і велику кількість розв'язаних прикладів. Можуть бути використані студентами університету денної та без-відривної форм навчання всіх спеціальностей.
Іл. 2. Бібліогр.: 3 назви.

ВСТУП

Наука, яка вивчає загальні закономірності випадкових явищ незалежно від їх конкретної природи й дає методи кількісної оцінки впливу випадкових факторів на різні явища, називається теорією ймовірностей.

Методи теорії ймовірностей застосовуються в різних галузях природознавства й техніки: у теоріях масового обслуговування, надійності, стрільб, автоматичного управління, а також геодезії, астрономії і т. д. Крім того, теорія ймовірностей є основою для обґрунтування математичної і прикладної статистики.

1. ВИПРОБУВАННЯ І ПОДІЇ. ВИДИ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Нехай відбувається деяке випробування (дослідження, експеримент, спроба) з випадковим наслідком. Під **випробуванням** розуміється деяка сукупність умов і дій, що може бути відтворена яку завгодно велику кількість разів. Реалізація цих умов є **подією**.

Випадковою називається подія, яка в разі виконання сукупності деяких умов може відбутися, а може й не відбутися. Наприклад, випадіння орла чи решки при однократному підкиданні монети; у погану погоду – відліт літака за розкладом; влучення в мішень при трьох пострілах і т. д. Але повернемося до експерименту з монетою. Кожна випадкова подія (наприклад, випадіння орла) є результатом дії багатьох випадкових причин: сила, з якою кинута монета, маса монети, її форма і т. д. Неможливо врахувати вплив на результат усіх цих причин. Не можна передбачити, трапиться одинична подія чи ні. Але якщо розглядаються випадкові події, які можуть багатократно спостерігатись за **однакових умов**, тобто, якщо розглядаються масові однорідні випадкові події, то тут все змінюється. Велика кількість однорідних випадкових подій, незалежно від їх конкретної природи, підпорядковується так званим ймовірнісним закономірностям. Встановленням цих закономірностей і займається наука теорія ймовірностей.

Надалі ми будемо часто застосовувати такі поняття, як «випробування» і «подія» («випадкова подія»). Розглянемо їх на прикладах:

В урні знаходяться кольорові кулі. Із урни виймають одну кулю. Виймання кулі – це випробування, поява кулі певного кольору – подія.

Стрілець стріляє в мішень. Постріл – це випробування, влучення в мішень (або промах) – подія.

Тому надалі подію будемо розглядати як результат випробування. Випадкові події будемо позначати літерами A, B, C...

Означення. Подія називається **вірогідною**, якщо вона обов’язково станеться в даному випробуванні.

Наприклад, якщо в урні є декілька куль (і всі вони білі), то подія A – виймання білої кулі – вірогідна; при скиданні бомби з літака вірогідна подія – падіння бомби на поверхню землі.

Означення. Подія називається **неможливою**, якщо вона не може відбутися в даному випробуванні.

Наприклад, за відсутності струму в електричному колі неможлива подія – увімкнення лампи; при підкиданні грального кубика – неможлива подія – випадіння водночас «2» і «4» очок.

Зауважимо, що вірогідні й неможливі події – це дві крайності випадкової події.

Означення. Дві події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в даному випробуванні.

Наприклад, подія A – студент прийшов на лекцію, подія B – цей самий студент не прийшов на цю саму лекцію. Ці події несумісні.

Розширимо поняття несумісних подій.

Означення. Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються **несумісними** (парами несумісними), якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно.

Наприклад, подія A_1 – випадіння «1» при одному підкиданні грального кубика, подія A_2 – аналогічно випадіння «2», ... , подія A_6 – випадіння «6». Усі ці події будуть несумісними, тому що при одному підкиданні ніякі дві події (із перелічених) водночас ніколи не відбудуться.

Означення. Дві події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає появу другої події в тому самому випробуванні.

Наприклад: A – випадіння трьох очок при підкиданні грального кубика; B – випадіння непарної кількості очок. Події A і B сумісні.

Означення. Група подій називається **групою сумісних подій**, якщо сумісні хоча б дві події з цієї групи.

Наприклад, виконано три постріли. Подія A_1 – влучання при одному пострілі, A_2 – при другому, A_3 – при третьому, A_1, A_2, A_3 – утворюють групу сумісних подій.

Означення. Декілька подій утворюють **повну групу**, якщо в результаті випробування з'явиться хоча б одна з цих подій. Іншими словами, поява хоча б однієї події з повної групи є вірогідна подія.

Наприклад: випадіння орла чи решки при підкиданні монети; ні однієї помилки, одна, дві, три й більше помилок на одній сторінці друкарського тексту.

Розглянемо окремий випадок (надалі достатньо поширений) цього означення.

Означення. Декілька подій утворюють **повну групу парами несумісних подій** (або просто: повну групу несумісних подій), якщо в результаті випробування з'явиться одна й тільки одна подія.

Наприклад, стрілець робить два постріли по мішені. Розглянемо, які події можуть відбутися в цьому випадку:

A_1 – стрілець влучив у мішень і перший, і другий раз;

A_2 – стрілець влучив у мішень при першому пострілі, а при другому не влучив;

A_3 – стрілець не влучив при першому пострілі, а при другому влучив;

A_4 – стрілець не влучив ні при першому пострілі, ні при другому.

Ці чотири події утворюють повну групу (за умовами прикладу інших подій просто не можна вигадати). Крім того, перелічені події парами несумісні. Дійсно, якщо буде наявна подія A_2, то, наприклад, подія A_3 у тому самому випробуванні не відбудеться. Тобто, у випробуванні з'явиться одна й тільки одна подія.

Означення. Якщо дві несумісні події утворюють повну групу, то їх називають **протилежними**.

Подію, протилежну A, будемо позначати через $\overline{A}$.

Наприклад: A – студент склав іспит, $\overline{A}$ – студент не склав іспит.

Означення. Декілька подій називають **рівноможливими**, якщо умови їх виникнення однакові й немає підстав стверджувати, що якась з цих подій у результаті випробування має більше шансів відбутися, ніж інші.

Наприклад, орел і решка при підкиданні монети – рівноможливі події (монета виготовлена з однорідного матеріалу, має правильну форму і т. д.)

Зауважимо, що існують такі групи подій, які водночас: парами несумісні, рівноможливі і, крім того, вони утворюють повну групу. Наприклад: випадіння орла або решки при підкиданні монети; випадіння 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок при підкиданні грального кубика.

Решту видів випадкових подій розглянемо пізніше.

Запитання для самоперевірки

1. Яка подія називається випадковою?
2. Які події називають несумісними?
3. Що таке повна група несумісних подій?
4. Які дві події називають протилежними?
5. Які події називають рівноможливими?

2. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

2.1. Класичне означення ймовірності

Приклад. В урні 5 куль: 3 білі й 2 чорні. Очевидно, можливість вийняти білу кулю більша, ніж можливість вийняти чорну кулю. Цю можливість можна охарактеризувати числом.

Нехай випробування – виймання кулі з урни. Подія A – поява білої кулі. Кожний із можливих результатів випробування будемо називати елементарним наслідком. Позначимо їх таким чином: $B_1, B_2, \ldots$ і т. д. Таких наслідків буде п'ять:

B_1 – з'явилася біла куля;

B_2 – з'явилася біла куля;

B_3 – з'явилася чорна куля;

B_4 – з'явилася біла куля;

B_5 – з'явилася чорна куля.

Зауважимо, що нумерація елементарних наслідків цілком довільна. Вони **єдиноможливі** (в урні п'ять куль) і **рівноможливі** (кулі мають однакову масу, форму й т. д.). Ті елементарні наслідки, у яких подія A з'являється, будемо називати сприятливими для A. У цьому прикладі це B_1, B_2, B_4.

Відношення кількості сприятливих для події A елементарних наслідків до їх загальної кількості називають імовірністю події A і позначають її через $P(A)$ (або просто p). У нашому прикладі $P(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Дамо тепер означення ймовірності (класичне). Нехай n – кількість усіх можливих елементарних наслідків; m – кількість елементарних наслідків, сприятливих для події A.

Означення. Ймовірністю події A називають відношення кількості m сприятливих для події A елементарних наслідків до загальної кількості n усіх рівноможливих, несумісних, елементарних наслідків, які утворюють повну групу. Ймовірність події A визначається за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Формула (1) називається **класичним означенням імовірності**.

Із формули (1) випливають:

Властивість 1. Ймовірність вірогідної події A дорівнює 1.

Дійсно, якщо подія A вірогідна, то всі елементарні наслідки будуть сприятливими для A. Тобто $m = n$, а тому $P(A) = 1$.

Властивість 2. Ймовірність неможливої події A дорівнює 0.

Дійсно, якщо подія A неможлива, то жоден елементарний наслідок не буде сприятливим для A, тобто $m = 0$, а тому $P(A) = 0$.

Властивість 3. Ймовірність випадкової події є додатне число, яке міститься між нулем і одиницею.

Дійсно, випадковій події буде сприяти тільки деяка частина елементарних наслідків, тобто $0 < m < n$. А тому $0 < P(A) < 1$.

А взагалі

$$\mathbf{0 \le P(A) \le 1}.$$

Будемо пам'ятати, що $P(A)$ не може бути:

1) більше одиниці;

2) від'ємним числом.

Приклад. Студент вивчив 12 питань з 20. Знайти ймовірність того, що він відповість на одне задане питання.

Розв'язання. Подія A – студент відповість на задане питання. Ймовірність появи цієї події знайдемо за формулою (1): $P(A)=m/n$.

Усього елементарних наслідків 20 (загальна кількість питань). З них – елементарних наслідків, які сприяють події A, 12 (кількість вивчених питань). Тобто $n=20,\ m=12$. Тоді $P(A)=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=0{,}6$.

2.2. Відносна частота. Статистичне означення ймовірності. Геометричне означення ймовірності

Означення. Відносною частотою $W(A)$ події A називається відношення кількості $m*$ випробувань, у яких подія A з'явилася, до загальної кількості $n*$ фактично виконаних випробувань:

$$W(A)=\frac{m*}{n*}. \tag{2}$$

Чим відрізняються поняття ймовірності події A і відносної частоти тієї самої події? Якщо уважно прочитати означення ймовірності й відносної частоти, то можна зробити висновок: ймовірність обчислюють **до випробування,** а відносну частоту – **після**.

Приклад. Перевіряється партія із 100 виробів. Виявлено 2 нестандартних вироби. Нехай подія A – поява нестандартного виробу. Тоді відносна частота події A дорівнює: $W(A)=\frac{2}{100}=0{,}02$.

Доведено, що коли в однакових умовах виконуються серії спроб, у кожній з яких кількість випробувань достатньо велика, то відносна частота змінюється від серії до серії мало. А взагалі, коли кількість випробувань необмежено збільшується, то відносна частота починає наближатися до деякого числа. Це число і приймають за ймовірність події A.

Означення. Статистичною ймовірністю події A називається границя відносної частоти, коли кількість випробувань прямує до нескінченності:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} W(A).$$

Порівняємо класичне й статистичне означення ймовірності. Сформулюємо їх переваги й недоліки.

Перевага класичного способу: ймовірність можна визначити до випробування. Недоліки: кількість елементарних наслідків скінченна; цей спосіб може бути застосований тільки тоді, коли розглядаються рівноможливі результати наслідків (що не завжди можливо).

Перевага статистичного способу: спирається на реальний експеримент. Недолік: для надійного означення ймовірності потрібна велика кількість випробувань.

Ще раз нагадаємо, що класичне означення ймовірності не можна застосовувати у випадку з нескінченною кількістю спроб.

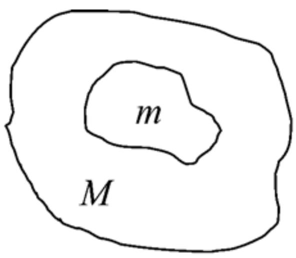


Рис. 1

Декілька слів про геометричне означення ймовірності. Розглянемо двовимірний простір. Нехай область m утворює частину області M (рис. 1). В область M довільно кинута точка. Вона може опинитися в будь-якій точці області M. Нехай імовірність влучення кинутої точки в деяку частину області M пропорційна площі цієї частини й не залежить від її розташування і форми. У цих припущеннях імовірність потрапляння точки в область m буде обчислюватися за формулою

$$P = \frac{S_m}{S_M},$$

де S_m – площа області m; S_M – площа області M.

Приклад. Маємо два концентричних кола з радіусами 3 і 10 см відповідно. Точка кидається довільно у велике коло. Знайти ймовірність того, що точка влучить у кільце, утворене побудованими колами.

Розв'язання. Площа великого кола: $\pi R^2 = \pi \cdot 100 = 100\pi$. Площа малого кола: $\pi r^2 = 9\pi$. Площа кільця: $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(100 - 9) = 91\pi$. Тоді ймовірність: $P = \frac{91\pi}{100\pi} = \frac{91}{100} = 0,91$.

Аналогічні формули геометричної ймовірності можна записати для одновимірного або тривимірного простору.

Розв'язання прикладів

Блок 1 (найпростіші приклади)

Розглянуті приклади розв'язуються за однією схемою, яка досить докладно розглянута в п 2.1 «Класичне означення ймовірності». Будемо застосовувати класичну формулу ймовірності $P(A) = \frac{m}{n}$, де n – загальна кількість елементарних наслідків, а m – кількість наслідків, які сприяють появі події A. Ще нагадаємо, що $0 \le P(A) \le 1$.

Приклад 1. У ящику 12 деталей з яких 9 стандартних, а решта – браковані. Знайти ймовірність того, що вийнята деталь буде бракованою.

Розв'язання. Маємо 9 стандартних і 3 бракованих деталі. Ясно, що деталі однакові за розміром, масою і т. д. Подія A – буде вийнята бракована деталь. Усього елементарних наслідків 12 (можемо обрати довільну деталь з 12). Тобто $n=12$. А елементарних наслідків, які сприяють події A, буде 3 (маємо 3 бракованих деталі й кожну з них ми можемо вийняти), тобто $m=3$.

Тоді: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0,25$.

Приклад 2. Із колоди в 36 карт витягають одну карту. Знайти ймовірність того, що це буде король.

Розв'язання. Подія A – витягнута карта – король. $n=36$, $m=4$. Тоді: $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Приклад 3. Гральний кубик підкидають один раз. Знайти ймовірність того, що: 1) випаде «2»; 2) випаде парна кількість очок.

Розв'язання. 1. Тут подія A – при підкиданні грального кубика випаде «2».

n – кількість усіх елементарних наслідків: гральний кубик має шість однакових граней, тому $n=6$;

m – кількість елементарних наслідків, які сприяють події A. Оскільки тільки на одній грані маємо «2», то $m=1$.

Тоді: $P(A)=\frac{1}{6}$.

2. B – при підкиданні грального кубика випаде парна кількість очок. Так само, як і в першому випадку, $n=6$, а $m=3$, тому що на трьох гранях маємо парну кількість очок: «2», «4», «6». Тоді: $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5$.

Приклад 4. В урну поклали три синіх, п'ять чорних і вісім червоних куль. Знайти ймовірність: 1) вийняти червону кулю; 2) вийняти синю кулю; 3) вийняти чорну кулю; 4) вийняти білу кулю.

Розв'язання. 1. Подія A – буде вийнято червону кулю. Усього елементарних наслідків (кількість куль) буде 16. А елементарних наслідків, які сприяють події A, буде 8 (маємо 8 червоних куль). Тобто $n=16$, $m=8$. Тепер за формулою (1) знайдемо ймовірність події A: $P(A)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}=0,5$.

2. Аналогічно: подія B – буде вийнято синю кулю. Тоді: $n=16$, $m=3$. $P(B)=\frac{3}{16}=0,1875$;

3. Подія C – буде вийнято чорну кулю. $n=16$, $m=5$. $P(C)=\frac{5}{16}=0,3125$;

4. Подія D – буде вийнято білу кулю. Як і в попередніх прикладах, $n=16$, а ось $m=0$ (білих куль немає), тому $P(D)=\frac{0}{16}=0$. Подія D – неможлива.

Приклад 5. Магазин одержав ящик стандартних виробів. Покупець навмання вибирає з ящика один виріб. Яка ймовірність того, що взятий виріб буде: 1) стандартним; 2) бракованим?

Розв'язання. 1. Подія A – взятий виріб стандартний. Тоді $P(A)=1$ (за умовою всі вироби стандартні й $n=m$). У цьому випадку A – вірогідна подія;

2. Подія B – взятий виріб бракований. Тоді $P(B)=0$ (за умовою бракованих виробів немає і $m=0$). У цьому випадку B – неможлива подія.

Приклад 6. Зроблено 100 пострілів у ціль, серед яких було 70 влучень. Чому дорівнює відносна частота події A – кількості влучень у ціль?

Розв'язання. За формулою (2), враховуючи, що $n=100$, $m=70$, отримуємо $W(A)=\dfrac{70}{100}=0,7$.

Приклад 7. При стрільбі з гвинтівки відносна частота влучення в ціль виявилась рівною 0,8. Знайти кількість влучень, якщо було зроблено 150 пострілів.

Розв'язання. За умовою прикладу $W(A)=0,8$, а $n=150$. Тому згідно з формулою (2) визначаємо $m=W(A)\cdot n=0,8\cdot 150=120$.

Блок 2

Приклад 1. Підкинули два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що: 1) сума очок буде дорівнювати 2; 2) сума очок буде дорівнювати 1; 3) сума очок буде дорівнювати 7; 4) сума очок буде дорівнювати 10, а різниця 2.

Розв'язання. Ті очки, які можуть випасти на кожному кубику, розглянемо в такій схемі:

I кубик	II кубик
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

Розв'язувати приклад будемо за формулою (1): $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

В усіх питаннях прикладу число n буде однаковим. Знайдемо його. Для цього підрахуємо всі елементарні наслідки. Одне очко першого кубика може випасти з будь-якою кількістю очок другого кубика, тобто: (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6). Маємо шість елементарних наслідків. Далі: два очка першого кубика можуть випасти з будь-якою кількістю очок другого кубика: (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6). Це ще шість елементарних наслідків. Аналогічно: (3,1); (3,2); ... (3,6); (4,1); (4,2); ... (4,6); і т. д. Тобто елементарних наслідків буде 36: $n=36$.

1. Подія A – сума очок буде дорівнювати 2. За схемою обчислимо m – кількість елементарних наслідків, які сприяють появі A. Наслідок один: на першому кубику 1 очко і на другому кубику теж 1 очко, сума дорівнює 2, тобто $m=1$. Тоді: $P(A)=\dfrac{1}{36}$.

2. Подія B – сума очок буде дорівнювати 1. У цьому випадку $m = 0$ (немає жодного елементарного наслідка, за якого сума очок дорівнювала б 1), тоді $P(B) = \frac{0}{36} = 0$.

3. Подія C – сума очок буде дорівнювати 7. Обчислимо m: (1,6) (1 + 6 = 7); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1). Усього елементарних наслідків, які сприяють події C, буде 6. Тоді: $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

4. Подія D – сума очок буде дорівнювати 10, а різниця 2. Маємо два наслідки: (4,6); (6,4). Тобто $m = 2$, $P(D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Зауваження. Якщо цей приклад розглянути докладніше, тобто знайти по черзі ймовірність того, що сума очок буде дорівнювати 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, то одержимо такі значення (перевірте самостійно):

$$P(2) = \frac{1}{36};\ \ P(3) = \frac{2}{36};\ \ P(4) = \frac{3}{36};\ \ P(5) = \frac{4}{36};\ \ P(6) = \frac{5}{36};\ \ P(7) = \frac{6}{36};$$
$$P(8) = \frac{5}{36};\ \ P(9) = \frac{4}{36};\ \ P(10) = \frac{3}{36};\ \ P(11) = \frac{2}{36};\ \ P(12) = \frac{1}{36}.$$

Приклад 2. Гральний кубик підкидають двічі. Знайти ймовірність того, що: 1) випаде парна сума очок, яка більше 5; 2) сума очок буде кратна чотирьом.

Розв'язання. Зауважимо, що цей приклад має ту саму схему розв'язування, що й попередній. Тобто однаково, що один кубик підкинути двічі чи два кубика підкинути один раз.

1. Подія A – сума очок буде парна і більше 5. Нагадаємо, що $n = 36$ (кожна цифра, яких шість, при першому підкиданні може випасти з кожною цифрою при другому підкиданні). Кількість m наслідків, які сприяють появі події A, складається із таких комбінацій: (1,5); (2,4); (2;6); (3,3); (3,5); (4,2); (4,4); (4,6); (5,1); (5;3); (5,5); (6,2); (6,4); (6,6). Тобто $m = 14$. Тоді $P(A) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

2. Подія B – сума очок кратна 4 (тобто сума очок ділиться на 4). Зрозуміло, що $n = 36$. Числу m відповідають такі наслідки: (1,3); (2,2); (2,6); (3,1); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2); (6,6). Тобто $m = 9$. Отримуємо: $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Запитання для самоперевірки

1. Як формулюється класичне означення ймовірності? Що таке m і n?

2. Які нерівності задовольняє $P(A)$?

3. Чим відрізняється означення ймовірності події A від означення відносної частоти події A?

4. Що таке статистична ймовірність події A?

3. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає різні типи розміщення об'єктів та методи підрахунку всіх можливих способів виконання цих розміщень.

Головний принцип комбінаторики (правило множення). Припустимо, що потрібно послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу – n_2 способами і т. д. до k-ї дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій можна виконати N способами, кількість яких:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k . \qquad (3)$$

Приклад. З Києва до Дніпропетровська можна доїхати 5 поїздами, а з Дніпропетровська до Одеси 3 поїздами.

Розв'язання. За правилом (3) із Києва до Одеси можна доїхати $5 \cdot 3 = 15$ способами.

Означення. Розміщенням A_n^m із n елементів по m називаються такі їх комбінації, які відрізняються одна від одної складом елементів або їх порядком.

Кількість розміщень обчислюється за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} . \qquad (4)$$

Нагадаємо, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Наприклад: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Ще зауважимо: $0!=1$ і $1!=1$.

Приклад. Маємо множину із чотирьох елементів $\{a, b, c, d\}$. Знайдемо кількість розміщень із чотирьох елементів по три елементи. Тобто $n = 4$, $m = 3$.

Розв'язання. Спочатку перелічимо декілька таких комбінацій: $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{b, c, d\}$; $\{b, a, c\}$;… А тепер обчислимо загальну кількість таких комбінацій за формулою (4)

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 .$$

Означення. Переставленнями P_n із n елементів називають такі їх комбінації, які відрізняються одна від одної тільки порядком.

Кількість переставлень обчислюється за формулою

$$P_n = n! . \qquad (5)$$

Приклад. Маємо множину із п'яти елементів $\{a, b, c, d, k\}$. Знайдемо кількість переставлень із них.

Розв'язання. Спочатку перелічимо декілька комбінацій: $\{a, b, c, d, k\}$ $\{b, a, c, d, k\}$; $\{a, c, d, k, b\}$… Обчислимо загальну кількість таких комбінацій за формулою (5): $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Означення. Сполуками C_n^m із n елементів по m називають такі їх комбінації, які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом (тобто складом елементів).

Кількість сполук обчислюється за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} \tag{6}$$

Приклад. Маємо множину із п'яти елементів $\{a,b,c,d,k\}$. Знайдемо кількість сполук із п'яти елементів по три елементи. Тобто $n=5$, $m=3$.

Розв'язання. Перелічимо декілька комбінацій: $\{a,b,c\}$; $\{a,b,d\}$; $\{b,c,d\}\ldots$ А тепер обчислимо загальну кількість за формулою (6):

$$C_n^m = \frac{5!}{(5\text{-}3)!\cdot 3!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3}} = 10.$$

Зауважимо, що $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$, $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Розв'язання прикладів

Блок 2

Приклад 1. Скільки тризначних чисел (усі цифри різні) можна скласти з п'яти цифр 2, 3, 5, 7, 9?

Розв'язання. Зауважимо, що одне тризначне число відрізняється від іншого не тільки цифрами, але й порядком їх розташування (357 і 537 – різні числа). Тому з трьох перелічених означень (розміщення, переставлення й сполуки) треба вибрати розміщення. Маємо $n=5$, $m=3$.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60.$$

Приклад 2. Маємо чотири цифри: 2, 3, 4, 5. Скільки чотиризначних чисел (усі цифри різні) можна скласти із цих цифр?

Розв'язання. У цьому випадку одне число відрізняється від іншого тільки порядком: 2345; 3245; 3425 і т. д. Тобто потрібно застосовувати формулу (5): $P_n = n!$, тут $n=4$, тоді $P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

Приклад 3. Скільки існує варіантів обрати три деталі з ящика, у якому лежать вісім деталей?

Розв'язання. Надамо кожній деталі певний номер, тобто пронумеруємо їх: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. З них потрібно вибрати три деталі. Наприклад, виберемо деталі з номерами: 1, 2, 3, або 3, 2, 1, або 4, 6, 7; або 3, 5, 8 і т. д. Зауважимо, що комбінації 1, 2, 3 і 3, 2, 1 визначають один варіант вибору (маємо одні й ті самі деталі, інакше можна сказати, що немає значення, у якому порядку їх обирають), тому потрібно обрати формулу (6): $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$. Тут $n=8$, $m=3$.

$$C_8^3 = \frac{8!}{(8\text{-}3)!\cdot 3!} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 1\cdot \cancel{2\cdot 3}} = 56.$$

Приклад 4. У ліфт 9-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 6 чоловік. Скільки існує варіантів виходу людей з ліфта?

Розв'язання. Кожний з шести чоловік може вийти на довільному поверсі (з другого по дев'ятий). У цьому випадку за формулою (3) маємо: $N=8^6$.

Приклад 5. Перший студент має п'ять книг з математики, а другий – три книги з фізики (усі книги різні). Скількома способами вони можуть обмінятися один з одним по дві книги?

Розв'язання. Кількість варіантів обміну для першого студента дорівнює $N_1 = C_5^2$, а для другого студента $N_2 = C_3^2$. Враховуючи, що кожний варіант обміну першого студента може сполучатися з кожним варіантом обміну другого студента, будемо мати за формулою (3)

$$N = N_1\cdot N_2 = C_5^2\cdot C_3^2 = \frac{5!}{(5\text{-}2)!\cdot 2!}\cdot\frac{3!}{(3\text{-}2)!\cdot 2!} =$$

$$= \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{5!}{2!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 30.$$

Основні формули попередніх параграфів

Класична формула ймовірності: $P(A) = \dfrac{m}{n}$, n – загальна кількість випробувань, m – кількість випробувань, сприятливих для появи події A.

Розміщення: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Переставлення: $P_n = n!$.

Сполуки: $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$.

Розв'язання прикладів

Блок 1 (найпростіші приклади)

Приклад 1. У коробці 6 червоних і 3 зелених олівці. Навмання вибирають два олівці. Знайти ймовірність того, що олівці будуть червоного кольору.

Розв'язання. Нехай подія A – два олівці будуть червоного кольору. Нам потрібно знайти $P(A)$. Одразу зауважимо: всі олівці однакові за масою, формою, розміром і т. д. Але вони мають різний колір і кожний олівець має свій номер. Нумерація довільна: наприклад, червоні олівці нехай мають номери від першого по шостий, а зелені олівці нехай мають номери з сьомого по дев'ятий. Тому олівці навіть однакового кольору, але з різними номерами вважаються різними. Використаємо класичну формулу ймовірності (1). Підрахуємо загальну кількість варіантів: $n=C_9^2$. Тут 9 – загальна кількість олівців, а 2 – кількість олівців, які ми повинні витягти (колір може бути будь-який, тобто ми можемо витягти два зелених, два червоних, один зелений і один червоний). Нагадуємо, що n – кількість усіх можливих елементарних наслідків (які сприяють і не сприяють появі події A). Тепер знайдемо $m=C_6^2$. Тут 6 – загальна кількість червоних олівців, а 2 – кількість червоних олівців, які ми витягаємо з 6 червоних. Тобто $P(A)=\dfrac{C_6^2}{C_9^2}$. Далі обчислимо чисельник і знаменник:

$$C_9^2=\frac{9!}{(9-2)!\cdot 2!}=\frac{9!}{7!\cdot 2!}=\frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot 8\cdot 9}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot 1\cdot 2}=36,$$

$$C_6^2=\frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 5\cdot 6}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 1\cdot 2}=15.$$

Тоді $P(A)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$.

З а у в а ж е н н я. Надалі обчислення факторіалів будемо записувати скорочено. Наприклад:

$$\frac{8!}{5!}=6\cdot 7\cdot 8;\quad \frac{12!}{9!}=10\cdot 11\cdot 12;\quad \frac{3!}{7!}=\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}.$$

Приклад 2. У ящику 7 електроламп потужністю по 100 Вт та 5 по 60 Вт. Визначити ймовірність того, що дві взяті лампи будуть: 1) мати потужність 100 Вт; 2) різної потужності.

Розв'язання. 1. Подія A – обрані електролампи будуть потужністю 100 Вт. Кількість всіх елементарних наслідків дорівнює кількості комбінацій з 12 (загальна кількість усіх електроламп) по 2, тобто $n=C_{12}^2=\dfrac{12!}{2!\cdot 10!}=\dfrac{11\cdot 12}{1\cdot 2}=66$. Кількість сприятливих наслідків (обрали 2 лампи потужністю 100 Вт із 7) дорівнює $m=C_7^2=\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}=\dfrac{6\cdot 7}{1\cdot 2}=21$. Тому $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{21}{66}=\dfrac{7}{22}$.

2. Подія B – обрали 2 електролампи різної потужності. Тут також $n=66$. Кількість сприятливих наслідків $m=C_7^1\cdot C_5^1=35$, бо обрати 1 лампу потужністю 100 Вт можливо C_7^1 способами, а 1 лампу потужністю 60 Вт – C_5^1 способами. Отже, $P(B)=\dfrac{35}{66}$.

Приклад 3. У коробці 12 білих та 8 чорних куль. Навмання обирають три кулі. Визначити ймовірності таких подій: 1) подія A – обрали всі кулі білого кольору; 2) подія B – обрали одну білу кулю.

Розв'язання. 1. A – обрали три кулі білого кольору. Тут $n = C_{20}^{3}$ – кількість варіантів вибору трьох куль із загальної кількості $(12+8=20)$ куль. Кількість сприятливих наслідків $m = C_{12}^{3}$ – кількість варіантів вибору трьох білих куль із 12 білих. Отже, $P(A) = \dfrac{C_{12}^{3}}{C_{20}^{3}} = \dfrac{\dfrac{12!}{3!\cdot 9!}}{\dfrac{20!}{3!\cdot 17!}} = \dfrac{\dfrac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}}{\dfrac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3}} = \dfrac{11}{57}$.

2. Події B – обрали 1 білу кулю – відповідає умова, що дві кулі серед обраних будуть чорного кольору. Кількість $n = C_{20}^{3}$ та сама, що і для події A. Якщо серед трьох обраних куль одна біла куля, а дві чорні кулі, то $m = C_{12}^{1}\cdot C_{8}^{2}$, бо кожний варіант обирання білої кулі з 12 куль може сполучатися з кожним варіантом обирання 2 чорних куль із 8. Тоді $P(B) = \dfrac{C_{12}^{1}\cdot C_{8}^{2}}{C_{20}^{3}} = \dfrac{28}{95}$.

Приклад 4. На картках написано цифри 2, 4, 6, 8. Навмання обирають 3 картки і складають у ряд. Яка ймовірність одержати: 1) число 628; 2) непарне число; 3) парне число.

Розв'язання. 1. Нехай подія A – дістали число 628. Визначаємо, що $n = A_{4}^{3}$ – число тризначних чисел, які можна утворити з чотирьох заданих цифр (порядок цифр має значення). Кількість сприятливих наслідків $m = 1$ (треба одержати одне певне число 628). Тоді $P(A) = \dfrac{1}{A_{4}^{3}} = \dfrac{1}{\dfrac{4!}{1!}} = \dfrac{1}{24}$.

До речі, цей приклад можна розв'язати за іншою формулою (яку буде розглянуто пізніше).

2, 3. Припустимо, що подія B – отримали непарне число, а подія C – парне число. Враховуючи, що подія B неможлива (усі цифри парні), то $P(B) = 0$, а $P(C) = 1$, тому що в разі довільного обрання трьох карток отримуємо парне число.

Приклад 5. З літер розрізної абетки складено слово «книга». Літери розсипали, а потім склали в довільному порядку. Яка ймовірність того, що знову буде отримано слово «книга»?

Розв'язання. Визначаємо, що $n = P_5$, тому що маємо п'ять карток з різними літерами й порядок розташування карток має значення. Число $m = 1$, бо треба одержати одне певне слово «книга». Отже, $P = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120}$.

Цей приклад теж можна розв'язати за іншою формулою.

Приклад 6. Студент забув останні три цифри потрібного номера телефона, але він пам'ятає, що всі три цифри різні, тому набирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані цифри правильні.

Розв'язання. Визначаємо, що $n = A_{10}^{3}$ (всього цифр 10; студент набирає три цифри із цієї сукупності й одержує число, у якому порядок цифр важливий). Число $m = 1$ – маємо один правильний телефонний номер. Отже: $P = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_{10}^{3}} = \frac{7!}{10!} = \frac{1}{720}$.

Блок 2

Приклад 1. Вісім людей випадково розсаджуються за круглим столом. Знайти ймовірність того, що дві фіксовані людини сядуть поряд.

Розв'язання. Подія A – дві фіксовані людини сядуть поряд. Загальна кількість випадків $P_n = n = 8!$ Кількість випадків, які сприяють події A, дорівнює $m = 2 \cdot 8 = 16$. Пояснимо: усього пар сусідніх місць 8. Крім того, на кожній парі сусідніх місць фіксованих людей можна розсадити двома способами. Тоді $P(A) = \frac{16}{8!} = \frac{1}{2\,520}$.

Приклад 2. У розіграшу першості з футболу беруть участь 12 команд, із яких випадковим чином формують дві групи по 6 команд у кожній. Серед цих команд є три команди екстракласу. Знайти ймовірність того, що: 1) усі команди екстракласу потраплять в одну групу; 2) дві команди екстракласу потраплять в одну групу, а одна – у другу.

Розв'язання. 1. A – три команди потрапляють в одну групу $P(A) = \frac{2 \cdot C_3^3 \cdot C_9^3}{C_{12}^6} = \frac{2}{11}$.

2. B – дві команди потрапляють в одну групу, а одна – у другу групу. $P(B) = \frac{C_3^2 C_9^4 + C_3^1 C_9^5}{C_{12}^6} = \frac{9}{11}$.

Приклад 3. У три вагони заходять 9 пасажирів. Знайти ймовірність таких подій: 1) подія A – у перший вагон зайдуть 3 пасажири; 2) подія B – у кожний вагон зайдуть по 3 пасажири; 3) подія C – в один з вагонів зайдуть 4, а у два інших – 3 та 2 пасажири.

Розв'язання. 1. Кожний пасажир може зайти в кожний з трьох вагонів. Отже, 9 пасажирів можуть зайти в 3 вагони $n = 3^9$ способами. Кількість способів, якими можна з 9 пасажирів вибрати 3 для першого вагона, дорівнює C_9^3. Шість пасажирів, що залишилися, можуть зайти у два вагони 2^6 способами (у кожного пасажира два варіанти: або другий, або третій вагони). Отже, кількість сприятливих подій за правилом множення дорівнює $m = C_9^3 \cdot 2^6$. Шукана ймовірність дорівнює: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9} \approx 0{,}273$.

2. Для події B також $n=3^9$. Кількість способів, якими можна з 9 пасажирів вибрати 3 для першого вагона, дорівнює C_9^3, кількість способів вибрати 3 пасажири з шести, що залишились, для другого вагона дорівнює C_6^3. Три пасажири, що залишились, зайдуть у третій вагон C_3^3 способами. За правилом множення $m=C_9^3C_6^3C_3^3$, маємо: $P(B)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{C_9^3C_6^3C_3^3}{3^9}\approx 0{,}085$.

3. Для події C знову $n=3^9$. Чотири пасажири з дев'яти для одного з вагонів можна вибрати C_9^4 способами. Три пасажири з п'яти, що залишились, для іншого вагона можна вибрати C_5^3 способами. Два останніх пасажири займуть ще один вагон C_2^2 способами. Оскільки кожна з вказаних груп пасажирів може зайняти таким чином будь-який з трьох вагонів, то $m=C_9^4C_5^3C_2^2\cdot 3!$. Одержимо: $P(C)=\dfrac{m}{n}=$

$$=\frac{C_9^4\cdot C_5^3\cdot C_2^2\cdot 3!}{3^9}\approx 0{,}384.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що таке розміщення із n елементів по m?
2. Що таке переставлення із n елементів, за якою формулою вони обчислюються?
3. Що таке сполуки із n елементів по m?
4. Чим відрізняються розміщення від сполук?

4. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

4.1. Сума подій. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Означення. Сумою (об'єднанням) двох подій A і B називають подію $A+B$, яка полягає в появі або події A, або події B, або обох одночасно.

Інакше: $A+B$ – подія, яка полягає в появі хоча б однієї з подій A або B. Наприклад: A – влучення при першому пострілі, B – влучення при другому пострілі, тоді $A+B$ – влучення при першому пострілі, або при другому пострілі, або при обох одночасно (інакше: влучення хоча б при одному пострілі).

Означення. Сумою n **подій** $A_1, A_2, ..., A_n$ називається подія, яка полягає в появі хоча б однієї з перелічених подій.

А тепер нехай події A і B будуть несумісними. У цьому випадку сума $A+B$ це подія, яка полягає в появі або A, або B (несумісні події, за означенням, в одному випробуванні з'явитися не можуть).

Теорема (додавання ймовірностей двох несумісних подій). Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доведення. Нехай n – загальна кількість всіх можливих елементарних наслідків; m_1 – кількість наслідків, які сприяють появі події A; m_2 – кількість наслідків, які сприяють появі події B. Тоді m_1+m_2 – кількість наслідків, які сприяють появі або події A, або події B. Тоді:

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=\left\{\begin{matrix} P(A)=\dfrac{m_1}{n} \\ P(B)=\dfrac{m_2}{n} \end{matrix}\right\}=P(A)+P(B).$$

Висновок. Ймовірність появи однієї з n парами несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Тобто, якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ – парами несумісні події, то

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Приклад. У кошику 7 червоних, 3 білих і 5 зелених яблук. Витягається одне яблуко. Знайти ймовірність того, що це буде або червоне, або зелене яблуко.

Розв'язання. Подія A – витягнуте яблуко червоне, тоді $P(A)=\frac{7}{15}$ ($n=15$ – загальна кількість яблук). Подія B – витягнуте яблуко зелене, тоді $P(B)=\frac{5}{15}$. Події A і B несумісні (поява червоного яблука виключає появу зеленого в одному випробуванні). Тоді $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{15}+\frac{5}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}=0{,}8$.

Нехай події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу несумісних подій. Нагадаємо, що в результаті випробування обов'язково з'явиться тільки одна з них, і ніяка інша подія з'явитися на може. Тобто одна із n подій буде вірогідною, а решта $(n-1)$ подій – неможливими. Тоді $P(A_1+A_2+...+A_n)=1$. З іншого боку, події несумісні, тому можна застосувати висновок з теореми додавання несумісних подій:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Ліва частина рівності дорівнює одиниці, тому й права частина буде дорівнювати одиниці, тобто:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1. \tag{7}$$

Останню рівність можна сформулювати у вигляді **теореми**: сума ймовірностей n подій $A_1, A_2, ..., A_n$, які утворюють повну групу несумісних подій, дорівнює одиниці.

Нагадаємо, якщо $n=2$, тобто тільки дві несумісні події A_1 і A_2 утворюють повну групу, то такі події називають **протилежними**. Зазвичай, їх позначають так: A і $\overline{A}$.

Наприклад, влучення і промах при одному пострілі – протилежні події. A – влучення, $\overline{A}$ (не A) – промах. У цьому випадку рівність (7) запишеться у вигляді:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{8}$$

Тобто сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

Якщо позначимо $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q$, то рівність (8) матиме вигляд:

$$p+q=1. \tag{9}$$

Рівність (9), як і рівність (8), (по суті вони однакові), застосовується під час розв'язуванні практично всіх прикладів (частіше у вигляді $q=1-p$ або $p=1-q$).

Приклад. Ймовірність того, що студент відповість на задане запитання, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що він на запитання не відповість.

Розв'язання. Позначимо ймовірність відповіді на запитання через p. Тобто $p=0,6$. Тоді ймовірність того, що студент не відповість на запитання, буде: $q=1-p=1-0,6=0,4$.

4.2. Добуток подій. Теореми множення ймовірностей

Означення. Добутком (суміщенням) двох подій A і B називається подія $A\cdot B$, що полягає в одночасній появі обох подій.

Наприклад, подія A – влучення при першому пострілі; B – влучення при другому пострілі. Тоді $A\cdot B$ – влучення і при першому пострілі, і при другому.

Добутком n подій називають подію, яка полягає в одночасній появі усіх подій.

Розглянемо дві події A і B.

Означення. Події A і B називають **незалежними**, якщо поява однієї з них у випробуванні не змінює ймовірності появи іншої в тому самому випробуванні.

Наприклад. Два студенти складають залік. Розглянемо події:

A – перший студент складе залік;

B – другий студент складе залік.

Події A і B незалежні.

Теорема (множення ймовірностей двох незалежних подій). Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$P\left(A\cdot B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right).$$

Приклад. Маємо два ящики, які містять по 10 деталей. У першому ящику 9 стандартних, у другому – 7 стандартних деталей. Із кожного ящика витягають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що витягнуті деталі – стандартні.

Розв'язання. Подія A – із першого ящика буде витягнута стандартна деталь. Ймовірність цієї події $P\left(A\right)=0,9$. Аналогічно $P\left(B\right)=0,7$ (B – із другого ящика буде витягнута стандартна деталь). Події A і B незалежні. Тоді

$$P\left(A\cdot B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)=0,9\cdot 0,7=0,63.$$

Означення. Декілька подій називають **незалежними у сукупності**, якщо кожна подія і всі можливі комбінації решти є незалежні події.

Можна довести, що ймовірність сумісної появи n подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n\right).$$

Означення. Події A і B називають **залежними**, якщо ймовірність появи кожної з них змінюється у зв'язку з настанням чи ненастанням іншої.

Розглянемо випадки, у яких ймовірність появи деякої події A обчислюють за умови, що подія B уже відбулася (події A і B залежні).

Означення. Умовною ймовірністю $P_B\left(A\right)$ називають ймовірність появи події A, яка обчислюється в припущенні, що подія B уже відбулася.

Зауважимо, що умовну ймовірність позначають ще й так: $P(A/B)$.

Теорема (множення ймовірностей двох залежних подій). Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з подій на умовну ймовірність другої події, яка обчислена у припущенні, що перша подія уже відбулася:

$$P\left(A \cdot B\right) = P\left(A\right) \cdot P_A\left(B\right).$$

Приклад. В урні 5 чорних і 3 білих кулі. По одній (без повернення) витягають дві кулі. Знайти ймовірність того, що першою буде біла куля, а другою – чорна.

Розв'язання. Подія A – витягнута перша куля буде білою. Тоді $P\left(A\right) = \dfrac{3}{8}$. Подія B – витягнута друга куля буде чорною, за умови, що одна біла куля вже витягнута. Тоді $P_A\left(B\right) = \dfrac{5}{7}$.

Шукана ймовірність $P\left(AB\right) = P\left(A\right) \cdot P_A\left(B\right) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{15}{56}$.

Зауважимо, що $P\left(A\right) \cdot P_A\left(B\right) = P\left(B\right) \cdot P_B\left(A\right)$.

Цю рівність можна довести (див.[1, 2]), а можна просто перевірити на попередньому прикладі, тобто першою буде чорна куля, а другою – біла.

Дійсно $P\left(AB\right) = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{15}{56}$.

Висновок. Ймовірність сумісної появи декількох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності інших, причому ймовірність кожної такої події обчислюється за умови, що всі попередні події вже з'явились.

Наприклад, для чотирьох залежних подій висновок можна записати у вигляді:

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4\right) = P\left(A_1\right) \cdot P_{A_1}\left(A_2\right) \cdot P_{A_1 A_2}\left(A_3\right) \cdot P_{A_1 A_2 A_3}\left(A_4\right).$$

4.3. Ймовірність появи хоча б однієї події

Розглянемо дві незалежні події A_1 і A_2. Нехай імовірності появи цих подій відомі: p_1 і p_2. Що таке поява **хоча б однієї події**? Перелічимо варіанти:

1) поява події A_1 (A_2 не з'явилась);

2) поява події A_2 (A_1 не з'явилась);

3) поява обох подій: A_1 і A_2.

Усі три варіанти задовольняють вираз «хоча б одна подія». Ці варіанти – несумісні події, ймовірності яких потрібно знайти, а потім ці ймовірності додати. Якщо подій буде більше, то і варіантів збільшиться, а тому розв'язування прикладів займе більше часу.

Розглянемо інший шлях:

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї із подій A_1, A_2, $A_3,\ldots,A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A_1}$, $\overline{A_2},\ldots,\overline{A_n}$:

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})...P(\overline{A_n}).$$

Доведення. Для спрощення розглянемо тільки дві незалежні події A_1 і A_2. Позначимо через A подію, яка полягає в появі хоча б однієї з подій A_1 і A_2. Розглянемо події A і $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}$ – вони протилежні: A – поява хоча б однієї з подій A_1 і A_2; $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}$ – ні одна з подій не з'явиться. А тому сума ймовірностей цих подій буде дорівнювати одиниці.

$$P(A)+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=1,\text{ звідси } P(A)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}).$$

За теоремою множення незалежних подій ($\overline{A_1}$ і $\overline{A_2}$ незалежні) маємо:

$$P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}),\text{ тоді } P(A)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}).$$

Якщо позначити $P(\overline{A_1})=1-p_1=q_1$ і $P(\overline{A_2})=1-p_2=q_2$, то одержимо таку формулу:

$$P\left(A\right)=1-q_1\cdot q_2.$$

А в загальному випадку для n подій $A_1,A_2,...,A_n$, незалежних у сукупності, будемо мати:

$$P\left(A\right)=1-q_1\cdot q_2\cdot...\cdot q_n. \tag{10}$$

Висновок. Нехай події $A_1,A_2,...,A_n$ мають однакову ймовірність, тобто $P\left(A_1\right)=P\left(A_2\right)=...=P\left(A_n\right)=p$, тоді $P\left(\overline{A_1}\right)=P\left(\overline{A_2}\right)=...=P\left(\overline{A_n}\right)=q$ і формула (10) запишеться так:

$$P\left(A\right)=1-q^n. \tag{11}$$

Нарешті сформулюємо теорему додавання ймовірностей для сумісних подій.

Теорема (додавання ймовірностей сумісних подій): ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи.

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cdot B\right).$$

Перш ніж починати розв'язувати приклади, наголосимо, що додавати можна тільки ймовірності несумісних подій. A множити можна ймовірності незалежних і залежних подій.

Часто студенти замислюються, що робити з ймовірностями подій – додавати чи множити? Маленька підказка: якщо потрібно знайти ймовірність однієї події **або** ймовірність другої події (події несумісні), то ймовірності **додають**. Якщо потрібно знайти ймовірність однієї події **і** ймовірність другої, то ймовірності **множать**.

Основні формули

1. Теорема додавання ймовірностей **несумісних** подій:
$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right).$$
2. Сума ймовірностей протилежних подій:
$$p+q=1.$$
3. Теорема множення ймовірностей **незалежних** подій:
$$P\left(A\cdot B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right).$$
4. Теорема множення ймовірностей **залежних** подій
$$P\left(A\cdot B\right)=P\left(A\right)\cdot P_A\left(B\right).$$
5. Ймовірність появи хоча б однієї події:
$$P\left(A\right)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n.$$
6. Якщо $\mathrm{p}_1=p_2=\ldots p_n=p$, то і $q_1=q_2=\ldots=q_n=q$. Тоді
$$P\left(A\right)=1-q^n.$$

Розв'язання прикладів

Блок 1 (найпростіші приклади)

Приклад 1. В урні лежать кулі: 5 червоних, 3 жовтих і 4 зелених. Виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона: 1) або червона, або зелена; 2) або жовта, або зелена.

Розв'язання. 1. Подія A – буде вийнята одна червона куля. Знайдемо ймовірність цієї події за класичною формулою ймовірності $P\left(A\right)=\dfrac{5}{12}$. Аналогічно – подія B – буде вийнята одна зелена куля. $P\left(B\right)=\dfrac{4}{12}$. Події A і B несумісні. У разі появи, наприклад, події A у випробуванні подія B уже не з'явиться в тому самому випробуванні. Тому будемо користуватися теоремою додавання ймовірностей несумісних подій:
$$P\left(A+B\right)=P(A)+P\left(B\right)=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0,75;$$
2. Розв'язання аналогічне:
A – жовта куля; B – зелена куля.
$$P\left(A\right)=\frac{3}{12},\ P\left(B\right)=\frac{4}{12},\text{ тоді }\mathrm{P}\left(A+B\right)=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}.$$

Приклад 2. На полиці стоять 10 книжок, з них 3 книжки з математики і 5 книжок з англійської мови. Навмання витягають одну книжку. Знайти ймовірність того, що це книжка або з математики, або з англійської мови.

Розв'язання. Подія A – буде витягнута книжка з математики $P\left(A\right)=\dfrac{3}{10}=0,3$; подія B – буде витягнута книжка з англійської мови $P\left(B\right)=\dfrac{5}{10}=0,5$. Тоді $P\left(A+B\right)=0,3+0,5=0,8$.

Приклад 3. Ймовірність того, що перший футболіст влучить у ворота дорівнює 0,7, другий 0,8. Знайти ймовірність того, що коли кожний футболіст зробить по одному удару, то: 1) обидва влучать; 2) обидва не влучать.

Розв'язання. Уведемо позначення: $p_1=0,7$ – ймовірність влучення першого футболіста; $p_2=0,8$ – ймовірність влучення другого футболіста. Тоді за формулою $p+q=1$ одержимо: $q_1=1-p_1=1-0,7=0,3$ – ймовірність промаху першого футболіста; $q_2=1-p_2=1-0,8=0,2$ – ймовірність промаху другого футболіста.

1. Подія A – влучення першого футболіста, тоді $P(A)=p_1=0,7$. Аналогічно подія B – влучення другого футболіста, $P(B)=p_2=0,8$.

Події A і B незалежні. Тоді за теоремою множення ймовірностей незалежних подій одержимо $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=p_1\cdot p_2=0,7\cdot 0,8=0,56$.

2. Розв'язання аналогічне: $P(\overline{A})=q_1=0,3$ (нагадаємо, що $\overline{A}$ – протилежна подія – промах першого футболіста); $P(\overline{B})=q_2=0,2$. Тоді $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=$ $=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=q_1\cdot q_2=0,3\cdot 0,2=0,06$.

Приклад 4. Із колоди карт витягають одну за одною дві карти (без повернення). Знайти ймовірність того, що буде витягнута спочатку «6», а потім «дама».

Розв'язання. Подія A – буде витягнута «6». $P(A)=\dfrac{4}{36}$. Після цього в колоді залишилось 35 карт. Подія B – буде витягнута «дама» (за умови, що перед цим була витягнута «6»). Тобто маємо умовну подію B/A. Тоді $P\left(B/A\right)=\dfrac{4}{35}$. Застосуємо теорему множення ймовірностей залежних подій. $P(A\cdot B)=$ $=P(A)\cdot P\left(B/A\right)=\dfrac{4}{36}\cdot\dfrac{4}{35}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{4}{35}=\dfrac{4}{315}$.

З а у в а ж е н н я. Якщо першу карту повернути в колоду після витягання, то події A і B будуть незалежними й розв'язання прикладу буде таким:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{81}.$$

Приклад 5. На чотирьох картках написані літери «е», «ж», «а», «м». Навмання одну за одною витягають картки й викладають у ряд. Знайти ймовірність того, що одержимо слово «межа».

Розв'язання. Подія A – буде витягнута літера «м». $P(A)=\frac{1}{4}$ (тут користуємося формулою $P=\frac{m}{n}$, $n=4$ – загальна кількість літер, $m=1$ – літера «м» – одна).

Подія $B/_A$ – буде витягнута літера «е» (за умови, що вже витягнута літера «м», тобто $n=3$, $m=1$). Тоді $P\left(B/_A\right)=\frac{1}{3}$. Аналогічно $C/_{AB}$ – буде витягнута літера «ж» за умови, що вже витягнуті літери «м» і «е». $P\left(C/_{AB}\right)=\frac{1}{2}$. І нарешті, подія $D/_{ABC}$ – буде витягнута літера «а». Вона остання, тому $P\left(D/_{ABC}\right)=\frac{1}{1}=1$. А тепер застосовуємо теорему множення ймовірностей залежних подій: $P=P(A)\cdot P\left(B/_A\right)\cdot P\left(C/_{AB}\right)\cdot P\left(D/_{ABC}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{24}$.

Наголосимо, що цей приклад можна розв'язати за допомогою однієї з формул комбінаторики (переставлення).

Приклад 6. Ймовірність того, що перший стрілець влучить у ціль, дорівнює 0,4, для другого стрільця ця ймовірність становить 0,7. Знайти ймовірність того, що коли кожний стрілець зробить по одному пострілу, то: 1) влучить тільки перший стрілець; 2) влучить тільки другий стрілець; 3) влучать обидва стрільці; 4) влучить один стрілець.

Розв'язання. Уведемо позначення: подія A_1 – влучить перший стрілець. Подія $\overline{A}_1$ – перший стрілець не влучить. Подія A_2 – влучить другий стрілець. Подія $\overline{A}_2$ – другий стрілець не влучить. Позначимо $P(A_1)=p_1$; $P(\overline{A_1})=q_1$; $P(A_2)=p_2$; $P(\overline{A_2})=q_2$. За умовою $p_1=0,4$ – ймовірність влучення першого стрільця; тоді $q_1=1-p_1=1-0,4=0,6$ – ймовірність промаху першого стрільця; $p_2=0,7$ – ймовірність влучення другого стрільця; тоді $q_2=0,3$ – ймовірність промаху другого стрільця.

1. Потрібно знайти ймовірність влучення тільки першого стрільця. Другий стрілець теж зробив постріл, але не влучив.

Тобто тут ми розглядаємо події A_1 і $\overline{A_2}$ – вони незалежні (влучення і промах стрільців не залежать одне від одного), тому застосовуємо теорему множення ймовірностей незалежних подій:

$$P(A_1\cdot\overline{A_2})\cdot P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})=p_1\cdot q_2=0,4\cdot 0,3=0,12.$$

2. Розв'язання аналогічне:

$$P(\overline{A_1}\cdot A_2)\cdot P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)=q_1\cdot p_2=0,6\cdot 0,7=0,42.$$

3. Влучить і перший стрілець, і другий. Тут розглядаємо події A_1 і A_2 (нагадаємо, що вони незалежні).

Тому $P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=p_1\cdot p_2=0,4\cdot 0,7=0,28$.

4. Нехай подія А – влучить один стрілець. На перший погляд перший і четвертий випадки однакові. Але в першому потрібно було знайти ймовірність влучення першого стрільця, а тут потрібно знайти влучення одного (якого – не уточнюється) стрільця. Тобто в цьому випадку нас влаштує два варіанти (інших немає).

Перший: $A_1 \cdot \overline{A_2}$ – перший стрілець влучив, другий – ні. Другий: $\overline{A_1} \cdot A_2$ – перший стрілець не влучив, другий – влучив. Ще раз знайдемо ймовірності цих варіантів.

$$P(A_1 \cdot \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = p_1 \cdot q_2 = 0{,}12,$$
$$P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = q_1 \cdot p_2 = 0{,}42.$$

Зауважимо, що події $A_1 \cdot \overline{A_2}$ і $\overline{A_1} \cdot A_2$ несумісні (якщо у випробуванні з'явиться перший варіант $A_1 \cdot \overline{A_2}$, то другий $\overline{A_1} \cdot A_2$ у цьому самому випробуванні не з'явиться, і навпаки). Тому застосовуємо теорему додавання ймовірностей несумісних подій.

$$P = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54.$$

Блок 2

Приклад 1. Студент прийшов на екзамен, підготувавши 18 з 25 питань програми. Екзаменатор задає йому послідовно три запитання. Знайти ймовірність того, що:

1) студент знає відповіді на всі ці запитання;

2) студент відповість на перше запитання, а на решту не відповість.

Розв'язання. 1. Подія A – студент знає відповіді на всі три запитання. Відповідно A_1, A_2, A_3 – студент знає відповідь на перше, друге, третє запитання. Подія A відбувається, коли відбуваються всі три події A_1, A_2, A_3. Ці події залежні, бо після кожного заданого питання змінюється кількість цих запитань. Тому

$$P(A) = P(A_1) \cdot P\left(A_2 / A_1 \right) \cdot P\left(A_3 / A_1 A_2 \right);$$

$$P(A_1) = \frac{18}{25}; \quad P\left(A_2 / A_1 \right) = \frac{17}{24}; \quad P\left(A_3 / A_1 A_2 \right) = \frac{16}{23}.$$

Тоді $P(A) = \frac{18}{25} \cdot \frac{17}{24} \cdot \frac{16}{23} = \frac{204}{575}$.

2. Подія B – студент відповість на перше запитання, а на друге і третє – не відповість. Зауважимо, що студент не вивчив сім запитань. Схема розв'язування аналогічна п.1.

$$P(B) = \frac{18}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{6}{23} = \frac{63}{1150}.$$

Приклад 2. На семи картках написані букви «с», «і», «п», «с», «и», «с», «т». Навмання, одну за одною витягають п'ять карток і викладають у ряд. Знайти ймовірність того, що одержимо слово «іспит».

Розв'язання. Подія A – витягнута літера «і». Тоді $P(A) = \frac{1}{7}$. Подія B/A – буде витягнута літера «с». Зауважимо, що літер «с» три, тому $P(B/A)=\frac{3}{6}$; подія C/AB – буде витягнута літера «п»: $P(C/AB)=\frac{1}{5}$; подія D/ABC – буде витягнута літера «и» $P(D/ABC)=\frac{1}{4}$; подія $K/ABCD$ – буде витягнута літера «т» $P(K/ABCD)=\frac{1}{3}$. Тоді $\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\frac{1}{840}$.

Приклад 3. Ймовірність влучення першої гармати у ціль дорівнює 0,7; другої – 0,9; третьої – 0,75. Знайти ймовірність того, що при одному залпі з трьох гармат у мішень влучить: 1) тільки друга гармата; 2) перша і третя гармати; 3) дві гармати; 4) хоча б одна гармата.

Розв'язання. У прикладі 6 блока 1 ми вже розглядали аналогічний приклад з двома стрільцями. Тому в цьому розв'язанні буде менше пояснень.

Позначимо: $p_1=0,7$ – ймовірність влучення першої гармати; $p_2=0,9$, $p_3=0,75$ – ймовірності влучень відповідно для другої та третьої гармат. Тоді $q_1=0,3$ – ймовірність промаху першої гармати; $q_2=0,1$, $q_3=0,25$ – ймовірності промахів відповідно другої і третьої гармат.

1. A – влучить друга гармата (перша і третя не влучать)

$$P(A)=q_1\cdot p_2\cdot q_3=0,3\cdot 0,9\cdot 0,25=0,0675.$$

2. B – влучать перша і третя гармати (друга не влучить)

$$P(B)=p_1\cdot q_2\cdot p_3=0,7\cdot 0,1\cdot 0,75=0,0525.$$

3. C – влучать дві гармати – які не відомо, тому потрібно розглянути всі варіанти. Їх буде три:

$$P(C)=p_1\cdot p_2\cdot q_3+p_1\cdot q_2\cdot p_3+q_1\cdot p_2\cdot p_3=0,7\cdot 0,9\cdot 0,25+0,7\cdot 0,1\cdot 0,75+$$
$$+0,3\cdot 0,9\cdot 0,75=0,1575+0,0525+0,2025=0,4125.$$

4. Розглянемо протилежну подію $\overline{D}$ – жодна з гармат не влучить (див. підрозд. 4.3). Тоді $P(D)+P(\overline{D})=1$. Звідси $P(D)=1-P(\overline{D})$. Знайдемо $P(\overline{D})=$ $=q_1q_2q_3=0,3\cdot 0,1\cdot 0,25=0,0075$. І нарешті, $P(D)=1-0,0075=0,9925$.

Приклад 4. Маємо п'ять ключів, із яких тільки один підходить до замка. Знайти ймовірність того, що доведеться спробувати три ключі.

Розв'язання. Подія A_1 – перший ключ не підійде. A_2/A_1 – другий ключ не підійде за умови, що й перший не підійшов. A_3/A_1A_2 – третій ключ підійде за умови, що перші два ключі не підійшли.

Тоді

$$P=P(A_1)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\cdot P\left(A_3/A_1A_2\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=0,2.$$

Приклад 5. У групі п'ять студентів, які вивчають тільки німецьку мову, і 9 студентів, які вивчають тільки англійську мову. Знайти ймовірність того, що два студенти, які обрані навмання, вивчають одну й ту саму мову.

Розв'язання. Подія A – два студента вивчають німецьку мову. Подія B – два студенти вивчають англійську мову. Ці події несумісні. Застосуємо теорему додавання двох несумісних подій (нас задовольняє або подія A, або подія B): $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Знайдемо $P(A)$ і $P(B)$. Ці ймовірності обчислимо за допомогою класичної формули ймовірності:

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{14}^2};\quad P(B)=\frac{C_9^2}{C_{14}^2};\quad P(A)+P(B)=\frac{C_5^2+C_9^2}{C_{14}^2}.$$

$$C_{14}^2=\frac{14!}{2!\cdot 12!}=\frac{13\cdot 14}{1\cdot 2}=91;\quad C_5^2=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=10;\quad C_9^2=\frac{9!}{2!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9}{1\cdot 2}=36.$$

$$P(A)+P(B)=\frac{10+36}{91}=\frac{46}{91}.$$

Приклад 6. Ймовірність того, що подія з'явиться хоча б один раз у трьох незалежних у сукупності випробуваннях, дорівнює 0,973. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні (якщо в усіх випробуваннях ймовірність появи події однакова).

Розв'язання. Застосуємо формулу (11): $P(A)=1-q^n$. За умовою $P(A)=0{,}973$, $n=3$. Тому $0{,}973=1-q^3$, або $q^3=1-0{,}973=0{,}027$. Тоді $q=\sqrt[3]{0{,}027}=0{,}3$. Шукана ймовірність $p=1-0{,}3=0{,}7$.

Приклад 7. В урні 4 білих і 3 чорних кулі. Із урни послідовно одна за одною витягають дві кулі (без повернення). Знайти ймовірність того, що друга куля буде чорною.

Розв'язання. Розглянемо таку схему. Чорна куля може з'явитися другою у двох випадках: 1) перша куля біла, друга – чорна; 2) перша – чорна, друга – чорна.

Обидва варіанти підходять, і події, розглянуті в цих варіантах, несумісні. Тому:

$$P=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{12}{42}+\frac{6}{42}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}.$$

Приклад 8. Скільки потрібно взяти чисел із таблиці випадкових чисел, щоб з імовірністю, більшою 0,9375, бути впевненим, що серед них буде хоча б одне парне число?

Розв'язання. Подія A – серед n обраних із таблиці чисел хоча б одне парне число. Тоді $P(A)=1-q^n$, де $q=0{,}5$ – ймовірність того, що навмання обране число непарне. Враховуючи, що за умовою $P(A)>0{,}9375$, отримуємо нерівність $1-0{,}5^n>0{,}9375$ або $0{,}5^n<0{,}0625$.

Зауважимо, що $0{,}0625=(0{,}5)^4$.

Тоді $(0{,}5)^n<(0{,}5)^4$. Звідси $n>4$ (тому що основа нерівності менше одиниці), $n=5$.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке сума двох подій?
2. Як формулюється теорема додавання ймовірностей двох несумісних подій?
3. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій?
4. Що таке добуток двох подій?
5. Як записується теорема множення ймовірностей двох незалежних подій?
6. Що таке умовна ймовірність $P_B(A)$?
7. За якою формулою обчислюється ймовірність добутку двох залежних подій?
8. Як формулюється теорема про обчислення ймовірності появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$?

5. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БЕЙЄСА

Цей розділ у студентів традиційно вважається досить складним.

5.1. Формула повної ймовірності

Нехай деяка подія A може відбутися за умови появи однієї з n несумісних подій H_1, H_2, H_3, …, H_n (їх називають **гіпотезами**), що утворюють повну групу подій. Тобто, за цією умовою A може відбутися, якщо відбудеться одна з несумісних подій H_1, H_2, H_3, …, H_n. Іншими словами, поява події A визначає появу однієї, байдуже якої з несумісних подій AH_1, AH_2, AH_3, …, AH_n. Тому подію A можна записати у вигляді:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n.$$

Події AH_1, AH_2, AH_3, …, AH_n – несумісні. Тому

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_n).$$

Тепер за формулою добутку ймовірностей для залежних подій маємо:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n)$$

або, що те саме:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \quad (12)$$

Цю формулу називають **формулою повної ймовірності**.

Нагадаємо, що H_1, H_2, …, H_n утворюють повну групу несумісних подій, тому

$$P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1. \quad (13)$$

Як визначити, що у прикладі потрібно користуватися формулою (12)? Загального «рецепта» немає, але якщо знаходження ймовірності A проходить за два й більше етапів, то напевно буде потрібна формула (12).

Приклад 1. У першому ящику 3 стандартних і 2 браковані деталі, у другому 6 стандартних і 2 браковані деталі. Знайти ймовірність того, що з навмання вибраного ящика буде витягнута стандартна деталь?

Розв'язання. У разі застосуванні формули (12) рекомендуємо розписати, що таке події A, H_1, H_2, …, H_n.

Визначаємо, що таке подія A: у запитанні прикладу подія A уже сформульована. A – з навмання вибраного ящика буде витягнута стандартна деталь. Потрібно знайти $P(A)$. Тепер сформулюємо гіпотези.

Перший етап. Маємо два ящики, тому гіпотез буде дві. Спочатку ми навмання вибираємо ящик.

H_1 – вибраний перший ящик;

H_2 – вибраний другий ящик.

Ящики однакові на вигляд (це припускається за умовою прикладу), тому ймовірності цих гіпотез однакові: $P(H_1)=\frac{1}{2}$ і $P(H_2)=\frac{1}{2}$. Інших гіпотез немає. Перевіряємо умову (13):

$$P(H_1)+P(H_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Другий етап. Подія A/H_1 (ще раз переглянемо, що таке подія A і що таке гіпотеза H_1) – вибрана з ящика деталь буде стандартною за умови, що цей ящик перший.

Знайдемо ймовірність цієї події $P(A/H_1)$. Усього в першому ящику 5 деталей, з яких 3 стандартних. Ми знаходимо ймовірність того, що буде витягнута одна стандартна деталь. Застосуємо класичну формулу ймовірності й отримаємо: $P(A/H_1)=\frac{3}{5}=0{,}6$.

Тепер аналогічно: подія A/H_2 – вибрана з ящика деталь буде стандартною за умови, що цей ящик другий. Тоді $P(A/H_2)=\frac{6}{8}=0{,}75$.

Усі ймовірності знайдені і, нарешті, застосовуємо формулу (12):

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}75=0{,}675.$$

Приклад 2. У першій урні 4 білі і 2 чорні кулі, у другій – 3 білих і 5 чорних куль. З першої урни у другу навмання переклали кулю, а потім з другої урни взяли одну кулю. Яка ймовірність того, що взята з другої урни куля біла?

Розв'язання. Зауважимо, що умова прикладу складається з двох етапів. Спочатку перекладається куля з першої урни у другу, а потім із другої урни виймається куля. Тому тут ми теж застосуємо формулу повної ймовірності. Не слід думати, що умова прикладу завжди буде складатися з двох етапів. Для застосування цієї формули потрібно не менше двох етапів.

Подія A – із другої урни буде вийнята біла куля. Потрібно знайти ймовірність цієї події $P(A)$. Формулюємо гіпотези:

H_1 – із першої урни у другу буде перекладено білу кулю (по суті, це все одно, що з першої урни буде вийнята біла куля);

H_2 – із першої урни у другу буде перекладено чорну кулю (або із першої урни буде вийнята чорна куля).

Інших гіпотез немає. Знаходимо ймовірності цих гіпотез. Усього в першій урні 6 куль, з яких 4 білих і 2 чорних. За класичною формулою ймовірності маємо:

$$P(H_1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \quad \text{і} \quad P(H_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Одразу ж перевіряємо умову (13): $P(H_1)+P(H_2)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$. Далі знаходимо умовні ймовірності:

A/H_1 – із другої урни буде витягнута біла куля за умови, що туди перед цим поклали білу кулю;

A/H_2 – із другої урни буде витягнута біла куля за умови, що туди перед цим поклали чорну кулю.

Спочатку в другій урні було 8 куль, з них 3 білих і 5 чорних. За умовою гіпотези H_1 в другу урну поклали білу кулю, а тому $P(A/H_1)=\frac{4}{9}$. За умовою гіпотези H_2 в другу урну поклали чорну кулю, а тому $P(A/H_2)=\frac{3}{9}$.

Всі ймовірності знайдені – застосовуємо формулу (12) і маємо

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{9}=\frac{11}{27}.$$

Приклад 3. У групі із 10 студентів 3 студенти знають відповіді на всі 20 запитань; 4 студенти знають відповідь на 16 запитань (з 20); 2 студенти знають відповіді на 10 питань і 1 студент знає відповіді на 5 запитань. Знайти ймовірність того, що викликаний навмання студент знає відповідь на 3 заданих запитання.

Розв’язання. У цьому прикладі теж можна відстежити два етапи. Перший – виклик навмання студента; другий – відповідь цього студента на три запитання.

A – викликаний навмання студент знає відповідь на три запитання.

H_1 – студент знає відповіді на всі запитання (I група);

H_2 – студент знає відповіді на 16 запитань (II група);

H_3 – студент знає відповіді на 10 запитань (III група);

H_4 – студент знає відповіді на 5 запитань (IV група).

$$P(H_1)=\frac{3}{10};\quad P(H_2)=\frac{4}{10};\quad P(H_3)=\frac{2}{10};\quad P(H_4)=\frac{1}{10}.$$

Перевіряємо умову (13): $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=1$.

A/H_1 – викликаний студент знає відповіді на всі три запитання, якщо студент із I групи. $P(A/H_1)=1$.

Аналогічно:

$$P(A/H_2)=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx 0,49;$$

$$P(A/H_3)=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}\approx 0{,}1;$$

$$P(A/H_4)=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\approx 0{,}009.$$

Тоді $P(A)=0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}49+0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}009\approx 0{,}517$.

5.2. Формула Бейєса

Маємо повну групу несумісних подій (гіпотез) H_1, H_2, …, H_n. Відомі ймовірності цих гіпотез: $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$ (нагадуємо, що $P(H_1)+P(H_2)+...+P(H_n)=1$), і умовні ймовірності $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, …, $P(A/H_n)$.

Виконано випробування, у результаті якого з’явилася подія A. Ставимо питання: які ймовірності будуть мати гіпотези H_1, H_2, …, H_n у зв’язку з появою події A? Тобто нас цікавлять умовні ймовірності $P(H_i/A)$, $i=1,2,...,n$ для кожної гіпотези. Відповідь на це запитання дає **формула Бейєса**:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)};\quad i=1,2,...,n, \tag{14}$$

де $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$.

Формула Бейєса дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як у результаті випробування з’явилася подія A.

Приклад. Вироби з трьох фабрик надходять до складу: з першої фабрики надходить 30 % виробів, з другої – 50 %, з третьої – 20 %. Процент браку у виробах першої фабрики – 0,02 %, другої фабрики – 0, 07 % і третьої фабрики – 0,01 %. Вибраний виріб виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що він належить другій фабриці.

Розв’язання. З передостаннього речення бачимо, що подія вже відбулася. Тому зрозуміло, що потрібно користуватися формулою Бейєса. Почнемо з того, що речення: «Вибраний виріб виявився бракованим» (минулий час) перетворимо на майбутній: «Вибраний виріб виявиться бракованим» – і це буде подія A. На пердостаннє речення прикладу поки що не будемо звертати уваги. А далі уявимо собі, що потрібно знайти ймовірність події A (за формулою повної ймовірності). Почнемо з гіпотез:

H_1 – виріб належить I фабриці;

H_2 – виріб належить II фабриці;

H_3 – виріб належить III фабриці.

Відповідні ймовірності:

$P(H_1)=0{,}3$; $P(H_2)=0{,}5$; $P(H_3)=0{,}2$ (тому що в процентному відношенні кількість виробів фабрик: 30 %, 50 %, 20 %). Як завжди, перевіримо: $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=0{,}3+0{,}5+0{,}2=1$.

Тепер сформулюємо умовні події і знайдемо їх ймовірності.

A/H_1 – вибраний виріб буде бракованим за умови, що він належить I фабриці;

A/H_2 – вибраний виріб буде бракованим за умови, що він належить II фабриці;

A/H_3 – вибраний виріб буде бракованим за умови, що він належить III фабриці.

Ймовірності цих подій візьмемо з умови прикладу.

$$P(A/H_1) = 0{,}0002; \quad P(A/H_2) = 0{,}0007; \quad P(A/H_3) = 0{,}0001.$$

Коли всі ймовірності знайдені, повертаємося до змісту прикладу. Звертаємо увагу на останнє речення. За умовою виріб повинен належати другій фабриці (гіпотеза H_2). Тому за формулою Бейєса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}0007}{0{,}3 \cdot 0{,}0002 + 0{,}5 \cdot 0{,}0007 + 0{,}2 \cdot 0{,}0001} = \frac{0{,}00035}{0{,}00043} = \frac{35}{43}.$$

Тобто, до випробування ймовірність гіпотези H_2 дорівнювала 0,5, а після випробування ймовірність тієї самої гіпотези дорівнює $\frac{35}{43} \approx 0{,}814$.

Так само можна було б переоцінити гіпотези H_1 і H_3.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке гіпотези? Яку рівність задовольняє сума ймовірностей цих гіпотез?
2. Як записується формула повної ймовірності?
3. Як записується формула Бейєса?
4. Що можна переоцінити за допомогою формули Бейєса?

6. ПОВТОРЕННЯ ВИПРОБУВАНЬ. СХЕМА БЕРНУЛЛІ

6.1. Формули Бернуллі, Пуассона. Локальна теорема Лапласа

Нехай виконується декілька випробувань, у результаті яких може з'явитися подія A з деякою ймовірністю.

Означення. Якщо ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються **незалежними відносно події** A.

Розглянемо таку задачу: нехай в **однакових умовах** виконується n незалежних випробувань, у кожному з яких може з'явитися подія A з імовірністю p або не з'явитися – з ймовірністю $q = 1 - p$ (Така схема випробувань називається **схемою Бернуллі**).

Позначимо через $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ появу події A в *i*-му випробуванні. Тоді:

$$P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n) = p,$$

$$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = ... = P(\overline{A_n}) = 1 - p = q, \quad (\overline{A_i} \text{ – протилежна подія}).$$

Потрібно визначити ймовірність того, що в результаті виконання n незалежних випробувань подія A з'явиться m раз ($0 \le m \le n$).

Шукану ймовірність будемо позначати $P_n^m(A)$ (або просто P_n^m). Наприклад символ $P_8^3(A)$ означає, що у восьми випробуваннях подія A з'явиться три рази.

За умовою задачі подія A в n випробуваннях повинна з'явитися m раз, а в $(n-m)$ випробуваннях з'явиться протилежна подія $\overline{A}$. Причому подія А в n випробуваннях може з'явитися m раз у різних послідовностях. Пояснимо на прикладі: нехай $n=5$, $m=3$, тобто подія A з'явиться три рази і не з'явиться два рази. Перелічимо варіанти цього прикладу:

$A_1A_2A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5}$ (подія A з'явилась у перших трьох випробування і не з'явилась в четвертому і п'ятому випробуваннях);

$A_1A_2\overline{A_3}A_4\overline{A_5}$ (подія A з'явилась у першому, другому і четвертому випробуваннях і не з'явилась у третьому і п'ятому випробуваннях);

$A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}A_5$; $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4A_5$ і т. д. Очевидно, що кількість таких комбінацій буде дорівнювати C_5^3.

Повернемося до сформульованої задачі. Розглянемо подію B_1 (подія A з'явиться в перших m випробуваннях):

$$B_1 = \underbrace{A_1A_2...A_m}_{m\text{ раз}}\underbrace{\overline{A_{m+1}}\,\overline{A_{m+2}}...\overline{A_n}}_{(n-m)\text{ раз}}.$$

За умовою всі випробування незалежні, тому можна застосувати теорему множення для незалежних подій:

$$P(B_1)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_m)\cdot P(\overline{A}_{m+1})\cdot ...\cdot P(\overline{A}_n)=$$

$$=\underbrace{p\cdot p\cdot ...\cdot p}_{m\ раз}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot ...\cdot q}_{(n-m)\ раз}=p^m\cdot q^{n-m}.$$

Розглянемо аналогічні події:

$$B_2 = A_1A_2...\overline{A_m}A_{m+1}\overline{A_{m+2}}...\overline{A_n},\quad P(B_2)=p^m\cdot q^{n-m},$$

$$P(B_3)=p^m\cdot q^{n-m}\ \text{і т. д.}$$

Зауважимо, що події $B_1, B_2,...$ несумісні й кількість їх дорівнює C_n^m. Тому, застосовуючи теорему додавання несумісних подій, одержимо формулу

$$P_n^m = C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}. \tag{15}$$

Формулу (15) називають **формулою Бернуллі**. Ця формула має важливе значення в теорії ймовірностей, оскільки пов'язана з повторенням випробувань в однакових умовах, у яких і виявляються закономірності теорії ймовірностей.

Зауважимо, що у формулі Бернуллі наявні дві ймовірності: $P_n^m(A)$ і p.

Вони відрізняються своїм значенням:

$P_n^m(A)$ – це ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться m разів;

p – це ймовірність появи події A в **одному** випробуванні.

Приклад. Ймовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 5 вибраних деталей 3 будуть стандартними.

Розв'язання. Користуємося формулою (15). Для цього потрібно знати три значення:

n – загальна кількість випробувань;

m – кількість випробувань, у яких з'явиться подія А;

p – ймовірність появи події A у одному випробуванні.

У цьому прикладі: $n = 5, \quad m = 3, \quad p = 0,8$.

Тоді $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$. Застосуємо формулу Бернуллі:

$$P_5^3(A) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!}(0,8)^3 \cdot (0,2)^2 = 10 \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,2048.$$

Формула Бернуллі відіграє велику роль у теорії ймовірностей. Крім того, цю формулу легко запам'ятати й легко користуватися. Але вже при $n > 10$ обчислення за цією формулою ускладнюються. Тому при великій кількості випробувань користуються іншими формулами: локальною теоремою Лапласа і формулою Пуассона. Ці формули наближені й тим точніше підраховують ймовірність P_n^m, чим більше n. Формули «не заважають» одна одній, тому що застосовуються у різних випадках.

Почнемо з формули Пуассона. Її можна довести за допомогою формули Бернуллі й того факту, що при $n \to \infty$ $C_n^m \sim \frac{n^m}{m!}$. Ми доводити не будемо і запишемо кінцеву формулу:

$$P_n^m \approx \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}, \quad \text{де } a = n \cdot p. \tag{16}$$

Формулу (16) називають **формулою Пуассона**. Вона обчислює ту саму ймовірність, що і формула Бернуллі. І для розв'язання прикладів за допомогою формули Пуассона потрібні ті самі (що і для формули Бернуллі) значення: n, m, p. Використовувати формулу Пуассона потрібно при великій кількості випробувань n і малих значеннях p, ($p \le 0,01$).

Приклад. Телефонна станція обслуговує 2 000 абонентів. За певний інтервал часу абонент може зробити виклик з ймовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що за цей інтервал часу буде зроблено чотири виклики.

Розв'язання. Маємо: $n = 2\,000$, $m = 4$, $p = 0{,}003$. Користуємося формулою Пуассона. Спочатку знайдемо $a = n \cdot p = 2000 \cdot 0{,}003 = 6$. Тепер за формулою (16) одержимо:

$$P_{2000}^{4} \approx \frac{6^{4}}{4!} \cdot e^{-6} = \frac{1296}{24} \cdot e^{-6} = 54 \cdot e^{-6} = \left\{ e^{-6} \approx 0{,}0025 \right\} \approx 0{,}135.$$

Зауважимо, що наближення в формулі (16) тим краще, чим більше n і менше p. Крім того, формулою (16) будемо користуватися і у випадку, коли задається деяке середнє значення. Наприклад, середня кількість заявок, середня кількість літаків і т. д. Середнє значення у формулі Пуассона – це a.

Ті приклади, де $p > 0{,}01$, розв'язують за допомогою такої теореми.

Локальна теорема Лапласа. Нехай ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і $p \neq 0$, $p \neq 1$, тоді ймовірність $P_n^m(A)$ того, що подія A в n незалежних випробуваннях з'явиться m раз, наближено дорівнює (тим точніше, чим більше n і чим ближче значення p до числа 0,5)

$$P_n^m \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ де } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{17}$$

Формулу (17) називають **локальною теоремою Лапласа**.

У цій формулі $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Обчислювати в прикладі $\varphi(x)$ не потрібно, тому що значення цієї функції зібрані в табл. 1 [2, 3]. Зауважимо, що функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Тому від'ємних значень аргументу x в табл. 1 немає. Крім того, для $x > 4$ функція $\varphi(x) \approx 0$.

Приклад. Ймовірність появи деякої події в кожному випробуванні дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в 100 незалежних випробуваннях ця подія з'явиться 70 раз.

Розв'язання. Наголосимо, що для користування формулою (17) потрібно три значення n, m, p (як і у формулах (15) і (16)). Тут

$n = 100, \quad m = 70, \quad p = 0{,}8$. Тоді $q = 0{,}2$.

Спочатку знаходимо $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{70 - 80}{10 \cdot 0{,}4} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$.

За значенням x знаходимо за табл. 1 значення функції $\varphi(x) = \varphi(2{,}5)$ (нагадаємо, що ця функція парна). $\varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175$. А тепер за формулою (17) маємо:

$$P_{100}^{70} \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot 0{,}0175 \approx \frac{0{,}0175}{10 \cdot 0{,}4} = 0{,}004375.$$

Основні формули й межі їх застосування

Розглянуті три формули обчислюють одну й ту саму ймовірність P_n^m. Нагадаємо, що P_n^m – це ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A з’явиться m раз; у кожній формулі наявна ймовірність p – це ймовірність появи події A в одному випробуванні.

$P_n^m = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ – формула Бернуллі – застосовується при невеликій кількісті випробувань.

$P_n^m \approx \dfrac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$, де $a = n \cdot p$ – формула Пуассона – застосовується при великій кількості випробувань і $p \le 0,01$.

$P_n^m \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, де $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ – локальна теорема Лапласа – застосовується при великій кількості випробувань і $p > 0,01$. Наближення тим краще, чим ближче $p \cdot q$ до значення 0,25 (тобто $p \approx 0,5$).

За допомогою перелічених формул можна розв’язати й такі приклади.

Нехай виконано n випробувань, у кожному з яких подія A може з’явитися з ймовірністю p. Тоді ймовірність того, що подія A з’явиться менше m разів обчислюється за формулою

$$P_n(\text{менше } m \text{ разів}) = P_n^0 + P_n^1 + \ldots + P_n^{m-1}. \tag{18}$$

Аналогічно, більше m разів:

$$P_n(\text{більше } m \text{ разів}) = P_n^{m+1} + P_n^{m+2} + \ldots + P_n^n, \tag{19}$$

не менше m разів:

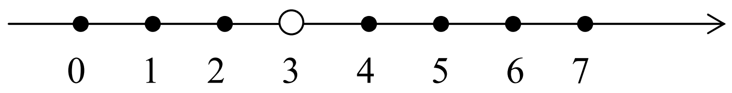
$$P_n(\text{ не менше } m \text{ разів}) = P_n^m + P_n^{m+1} + \ldots + P_n^n, \tag{20}$$

не більше m разів:

$$P_n(\text{не більше } m \text{ разів}) = P_n^0 + P_n^1 + \ldots + P_n^m. \tag{21}$$

Ці формули не рекомендується заучувати, а краще в кожному випадку користуватися такою схемою.

Наприклад: $n = 7$, $m = 3$. Відмітимо цілі значення від 0 до 7 на числовій осі



Тоді:

$P_7(\text{ більше 3 разів}) = P_7^4 + P_7^5 + P_7^6 + P_7^7$.

$P_n(\text{ менше 3 разів}) = P_7^0 + P_7^1 + P_7^2$.

$P_n(\text{не більше 3 разів}) = P_7^0 + P_7^1 + P_7^2 + P_7^3$.

$$P_n(\text{ не менше 3 разів}) = P_7^3 + P_7^4 + P_7^5 + P_7^6 + P_7^7 .$$

Розв'язання прикладів

Блок 1 (найпростіші приклади)

Приклад 1. По мішені виконали п'ять пострілів. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7. Знайти ймовірність двох влучень.

Розв'язання. Тут: $n = 5$, $m = 2$, $p = 0{,}7$. Тоді $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Кількість випробувань невелика, тому застосовуємо формулу Бернуллі:

$$P_5^2 = C_5^2 \cdot (0{,}7)^2 \cdot (0{,}3)^{5-2} = C_5^2 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot 0{,}01323 =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} \cdot 0{,}01323 = 10 \cdot 0{,}01323 = 0{,}1323 .$$

Приклад 2. Гральний кубик підкидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що «5» з'явиться 3 рази.

Розв'язання. Тут: $n = 4$, $m = 3$, $p = \frac{1}{6}$. Тоді $q = \frac{5}{6}$. За формулою Бернуллі:

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} \cdot \frac{5}{1296} = \frac{5}{324} .$$

Приклад 3. Ймовірність зробити помилку під час набору деякого тексту, який складається із 1 000 знаків, дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що під час набору буде зроблено 2 помилки.

Розв'язання. Маємо $n = 1\,000$, $m = 2$, $p = 0{,}005$. Зауважимо, що n – велике, а $p < 0{,}01$. Тому застосовуємо формулу Пуассона. Спочатку знаходимо $a = n \cdot p = 1\,000 \cdot 0{,}005 = 5$. Тоді:

$$P_n^m \approx \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} = P_{1000}^2 \approx \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} = \frac{25}{2} \cdot e^{-5} = \left\{ e^{-5} \approx 0{,}00674 \right\} = 0{,}08425 .$$

Приклад 4. Середня кількість літаків, які прибувають у аеропорт за хвилину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за хвилину прибуде 1 літак.

Розв'язання. Нагадаємо, що формулу Пуассона застосовують і тоді, коли задається деяке «середнє значення», тобто a. У нашому прикладі $a = 3$ (зауважимо, що в цьому випадку не потрібно знати, чому дорівнюють p і n), $m = 1$. За формулою Пуассона маємо:

$$P \approx \frac{3}{1!} \cdot e^{-3} = 3 \cdot e^{-3} = 3 \cdot 0{,}04979 = 0{,}14937 .$$

Приклад 5. Контрольну роботу успішно виконують 60 % студентів. Яка ймовірність того, що із 150 студентів роботу успішно виконають 110 студентів.

Розв'язання. За умовою $n = 150$ (достатньо велике число); $p = 0{,}6$, $m = 120$. Тому застосовуємо локальну теорему Лапласа. Спочатку знаходимо x:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 150 \cdot 0,6}{\sqrt{150 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = \frac{110 - 90}{6} = \frac{20}{6} \approx 3,33\,.$$

За табл. 1 знаходимо $\varphi(x) = \varphi(3,33) \approx 0,0016$. А тепер за локальною теоремою Лапласа маємо:

$$P_n^m \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \approx P_{150}^{110} \approx \frac{1}{\sqrt{150 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} \cdot 0,0016 \approx \frac{0,0016}{6} \approx 0,00027\,.$$

Приклад 6. Ймовірність народження дівчинки дорівнює 0,485. Знайти ймовірність того, що серед 75 новонароджених буде 38 дівчат.

Розв'язання. Користуємося локальною теоремою Лапласа. Оскільки n велике і $p > 0,01$. Позначаємо: $n = 75, \quad m = 38, \quad p = 0,485$, тоді $q = 0,515$ (до речі – це ймовірність народження хлопчика). Обчислюємо x:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{38 - 75 \cdot 0,485}{\sqrt{75 \cdot 0,485 \cdot 0,515}} \approx 0,375\,.$$

За табл. 1 знаходимо $\varphi(x) = \varphi(0,375) \approx 0,372$.

Тепер знайдемо шукану ймовірність:

$$P_{75}^{38} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{75 \cdot 0,485 \cdot 0,515}} \cdot 0,372 \approx 0,086\,.$$

Блок 2

Приклад. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність таких подій: 1) орел випаде менше двох разів; 2) орел випаде не менше чотирьох разів; 3) орел випаде більше чотирьох разів; 4) орел випаде хоча б один раз.

Розв'язання. Кількість випробувань ($n = 6$) невелика, тому в цьому прикладі будемо користуватись формулою Бернуллі (а точніше формулами (18)-(21)).

1. A – орел випаде менше двох разів. Користуємося формулою (18):

$n = 6, \quad p = 0,5, \quad q = 0,5$. Тоді $P(A) = P_6$(менше двох разів)$= P_6^0 + P_6^1 =$ $= C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5$.

Зауважимо, що $C_6^0 = 1$ і $C_6^1 = 6$ (перевірте). Тоді

P_6(менше двох разів) $= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{64}$.

2. B – орел випаде не менше чотирьох разів – формула (20):

$P(B) = P_6$(не менше чотирьох разів) =

$$= P_6^4 + P_6^5 + P_6^6 = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^2 + C_6^5 \cdot p^5 \cdot q + C_6^6 \cdot p^6 = 15 \cdot \frac{1}{64} + 6 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}.$$

3. C – орел випаде більше чотирьох разів – формула (19)

$P(C) = P_6$ (більше чотирьох разів) $= P_6^5 + P_6^6 = 6 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$.

4. D – орел випаде хоча б один раз. Раніше ми вже розв'язували приклади з умовою «хоча б один раз».

Нагадаємо схему розв'язування: спочатку сформулюємо протилежну подію $\bar{D}$ – орел не випаде жодного разу при 6 підкиданнях монети. Тоді сума ймовірностей протилежних подій буде дорівнювати одиниці:

$$P(D) + P(\bar{D}) = 1.$$

Звідси $P(D) = 1 - P(\bar{D})$. Знайдемо $P(\bar{D})$.

$P(\bar{D}) = P$ (орел не випаде жодного разу) $= C_6^0 \cdot p^0 \cdot q^6 = \frac{1}{64}$.

Тоді $P(D) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.

6.2. Інтегральна теорема Лапласа (Муавра–Лапласа)

Знову розглянемо n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може з'явитися з імовірністю p $(0 < p < 1)$. Потрібно знайти ймовірність того, що подія A в цих n випробуваннях з'явиться не менше m_1 і не більше m_2 разів $(m_1 < m_2)$. Якщо кількість випробувань n велика ($n \geq 30$), то цю ймовірність знаходять за такою формулою:

$$P(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \text{де } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (22)$$

Формула (22) називається **інтегральною формулою (теоремою) Лапласа (Муавра–Лапласа)**.

Функцію $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ називають **функцією Лапласа** і знаходять із табл. 2 [2, 3]. Графік цієї функції має вигляд, зображений на рис. 2; функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Наприклад, $\Phi(-3,5) = -\Phi(3,5)$ (у табл. 2 немає від'ємних значень x). Крім того, для $x \geq 5$ функція $\Phi(x) = \frac{1}{2}$. Аналогічно для $x \leq -5$, $\Phi(x) = -\frac{1}{2}$. Це потрібно пам'ятати і не шукати в таблиці, наприклад $\Phi(8)$, бо цього значення там немає. Тобто $\Phi(8) = \frac{1}{2}$. Аналогічно, $\Phi(25) = \frac{1}{2}$, $\Phi(-9) = -\Phi(9) = -\frac{1}{2}$. Крім того, $\Phi(0) = 0$.

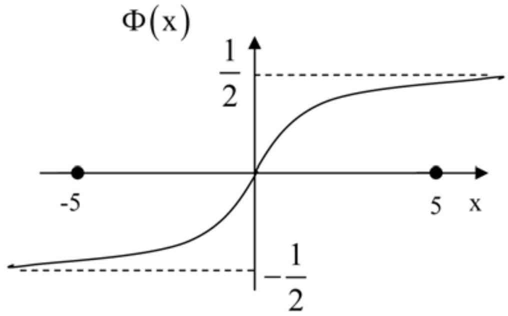


Рис. 2

Приклад. Процент проростання насіння становить 95 %. Знайти ймовірність того, що з 2 000 посіяних насінин проростуть від 1 880 до 1 960 штук.

Розв'язання. Тут $n = 2\,000$, $m_1 = 1880$, $m_2 = 1960$, $p = 0{,}95$, тоді $q = 0{,}05$. Користуємося формулою (22). Спочатку знаходимо x_1 і x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1880 - 2\,000 \cdot 0{,}95}{\sqrt{2\,000 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}} \approx -2{,}052;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1\,960 - 2\,000 \cdot 0{,}95}{\sqrt{2\,000 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}} \approx 6{,}155.$$

Тепер користуємося формулою (22):

$$P(1880,1960) \approx \Phi(6{,}155) - \Phi(-2{,}052) = \left\{\text{нагадуємо, що для } x \ge 5 \;\; \Phi(x) = \frac{1}{2}, \text{ а } \Phi(2{,}052) = -\Phi(2{,}052)\right\} = \frac{1}{2} + \Phi(2{,}052) \approx \left\{\text{за табл. 2 } \Phi(2{,}052) \approx 0{,}48\right\} \approx 0{,}5 + 0{,}48 = 0{,}98.$$

6.3. Ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності в незалежних випробуваннях

Знову розглянемо n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може з'явитися зі сталою ймовірністю p $(0 < \mathrm{p} < 1)$. Розглянемо відношення $\frac{m}{n}$, де m – кількість випробувань, у яких з'явилася подія A, а n – загальна кількість випробувань. Зауважимо, що в цьому випадку $\frac{m}{n}$ називають відносною частотою появи події A в n випробуваннях. (Це відношення ми раніше позначали через $W(A) = \frac{m^*}{n^*}$.) Тоді ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p, відносна частота появи події A відхилиться від її ймовірності p на величину, меншу, ніж $\varepsilon > 0$, обчислюється за формулою

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi(x), \quad \text{де } x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}. \tag{23}$$

Приклад. Ймовірність появи події A в кожному з 10 000 незалежних випробувань $p = 0{,}75$. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,001.

Розв'язання. Зауважимо, що умови прикладів на розглянуту формулу завжди довгі. Тому, щоб зрозуміти, що приклад розв'язується саме за формулою (23), потрібно знайти в умові такі слова «… відхилення відносної частоти від ймовірності (сталої ймовірності) … ».

Користуємося формулою (23):

$$n = 10\,000, \quad p = 0{,}75, \quad q = 0{,}25, \quad \varepsilon = 0{,}001.$$

Знаходимо $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0{,}001 \cdot \sqrt{\frac{10\,000}{0{,}75 \cdot 0{,}25}} \approx 0{,}23$.

За табл. 2 знаходимо $\Phi(x) = \Phi(0{,}23) = 0{,}091$. Шукана ймовірність буде дорівнювати:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}001\right\} \approx 2\Phi(0{,}23) = 2 \cdot 0{,}091 = 0{,}182.$$

6.4. Найбільш імовірне число появи події A в n незалежних випробуваннях

Означення. Найбільш імовірним числом m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається число, для якого ймовірність P_n^m перевищує або не менша ймовірності кожного з інших можливих наслідків випробувань.

Це число визначається із подвійних нерівностей:

$$np - q \le m_0 \le np + p. \tag{24}$$

Зауважимо, що довжина інтервалу з нерівностей (24) завжди дорівнює одиниці:

$$(np + p) - (np - q) = p + q = 1.$$

Тому якщо границі інтервалу дробові числа, то ми одержуємо одне значення найбільш імовірного числа m_0. Наприклад, якщо $7{,}7 \le m_0 \le 8{,}7$, то $m_0 = 8$. Якщо ж ці границі – цілі числа, то ми одержуємо два значення найбільш імовірного числа. Наприклад, якщо $12 \le m_0 \le 13$, то $m_0 = 12$ і $m_0 = 13$.

Приклад. Ймовірність того, що окремий пасажир запізниться на потяг, дорівнює 0,02. Знайти найбільш ймовірне число пасажирів, що запізняться на потяг, якщо їх загальне число дорівнює 450.

Розв'язання. Тут $n = 450$, $p = 0{,}02$, тоді $q = 0{,}98$. Застосовуємо нерівності (24):

$$450 \cdot 0{,}02 - 0{,}98 \le m_0 \le 450 \cdot 0{,}02 + 0{,}02 \text{ або}$$

$$8{,}02 \le m_0 \le 9{,}02. \text{ Звідси } m_0 = 9.$$

Тобто найбільш імовірне число пасажирів, що запізняться, дорівнює 9.

Основні формули

$P(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ – інтегральна теорема Лапласа.

Значення функції $\Phi(x)$ знаходяться за табл. 2 [2, 3]. $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x) = \Phi(x)$. Крім того, для $x \geq 5$ $\Phi(x) = 1/2$.

$P\left\{\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi(x)$, де $x = \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$ – ймовірність відхилення відносної частоти $\dfrac{m}{n}$ від ймовірності p в n незалежних випробуваннях;

$np - q \leq m_0 \leq np + p$ – найбільш імовірне число появи події A в n незалежних випробуваннях.

Розв'язання прикладів

Блок 2

Приклад 1. Кожний п'ятий покупець, який заходить до магазину, робить покупки. Чому дорівнює ймовірність того, що: 1) із 400 покупців не менше 50 і не більше 100 покупців зроблять покупки? 2) із 400 покупців більше 80 зроблять покупки?

Розв'язання. Кількість покупців і в першому, і в другому пунктах прикладу велика, тому застосовуємо інтегральну теорему Лапласа.

1. $n = 400$, $m_1 = 50$, $m_2 = 100$. Ймовірність p знайдемо із умови: кожний п'ятий покупець здійснює покупку, тобто із п'яти покупців один здійснює покупку. Тому $p = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$, тоді $q = 0{,}8$.

Знаходимо x_1 і x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -\frac{30}{8} = -3{,}75;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{20}{8} = 2{,}5.$$

$P_{400}(50{,}100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-3{,}75) = \Phi(2{,}5) + \Phi(3{,}75) =$ {нагадуємо, що значення функции $\Phi(x)$ знаходимо за табл. 2} $\approx 0{,}4938 + 0{,}4999 = 0{,}9937$.

2. Тут $n = 400$, $m_1 = 80$, $m_2 = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$.

Знаходимо x_1 і x_2:

$$x_1 = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{0}{8} = 0;$$

$$x_2 = \frac{400 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 40;$$

$P_{400}(80,400) \approx \Phi(40) - \Phi(0) =$ {нагадуємо, що для $x \geq 5$, $\Phi(x) = 0,5$, а $\Phi(0) = 0$ } $= 0,5 - 0 = 0,5$.

Приклад 2. Процент браку під час виготовлення деталей становить 0,1 %. Перевіряється партія із 2 000 деталей. Яка ймовірність того, що: 1) бракованих деталей від двох до чотирьох? 2) бракованих деталей буде більше двох? 3) буде хоча б одна бракована деталь?

Розв'язання. За умовою $n = 2000$, $p = 0,001$. Тобто кількість випробувань n велика, а ймовірність $p < 0,01$. Тому доцільно застосувати формулу Пуассона (16).

1. Знаходимо $a = n \cdot p = 2000 \cdot 0,001 = 2$. За умовою бракованих деталей повинно бути від двох до чотирьох, тобто або 2, або 3, а 4 деталі. Тоді

$$P_{1000}(\text{від двох до чотирьох}) = P_{1000}^{2} + P_{1000}^{3} + P_{1000}^{4} = \left\{ P_n^m \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a} \right\} =$$

$$= \frac{2^2}{2!} e^{-2} + \frac{2^3}{3!} e^{-2} + \frac{2^4}{4!} e^{-2} = e^{-2} \left(\frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} \right) = \frac{4}{e^2} \approx 0,5413.$$

2. Уважно читаємо питання: бракованих деталей буде більше двох; тобто 3, 4, 5, …, 1000. А за допомогою формули Пуассона потрібно буде знайти:

$$P_{1\,000}(\text{більше двох}) = P_{1\,000}^{3} + P_{1\,000}^{4} + P_{1\,000}^{5} + P_{1\,000}^{6} + \ldots + P_{1\,000}^{1\,000}.$$

Обчислення величезні! Але можна цей приклад розв'язати набагато швидше, за допомогою протилежної події. Якщо подія A – бракованих деталей буде більше двох, тоді $\overline{A}$ – бракованих деталей буде не більше двох. Тому

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left[P_{1000}^{0} + P_{1000}^{1} + P_{1000}^{2} \right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} \right] = 1 - e^{-2} (1+2+2) = 1 - \frac{5}{e^2} \approx 1 - 0,677 = 0,323.$$

3. Цей приклад ми теж розв'язуємо за допомогою протилежної події B – хоча б одна бракована деталь. $\overline{B}$ – жодної бракованої деталі.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_{1000}^{0} = 1 - \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0,8647.$$

Приклад 3. Ймовірність влучення в мішень при кожному із 700 пострілів дорівнює 0,4. На яке відхилення відносної частоти від ймовірності влучення при окремому пострілі можна сподіватися з імовірністю 0,997?

Розв'язання. Зауважимо, що в умові прикладу є словосполучення «... відхилення відносної частоти від ймовірності …». Звідси робимо висновок, що потрібна формула (23):

$$P\left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \approx 2\Phi(x), \text{ де } x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Відомо, що $n=700$, $p=0,4$, $P=0,997$. Потрібно знайти ε. Користуємося формулою. Ліва частина формули задана: $P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=0,997.$ Тоді $0,997\approx 2\Phi(x)$. Звідси $\Phi(x)=0,4985$.

Тепер із табл. 2 знайдемо x (наголосимо, що зазвичай ми розв'язували обернену задачу: за значенням x, знаходили $\Phi(x)$). $x=2,96$. З іншого боку $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$. Підставимо сюди відомі значення n, p, q і знайдемо ε.

$$2,96=\varepsilon\sqrt{\frac{700}{0,4\cdot 0,6}}\Rightarrow 2,96\approx\varepsilon\cdot 54\Rightarrow\varepsilon=\frac{2,96}{54}\approx 0,0548.$$

Приклад 4. Знайти найбільш імовірну кількість збитих літаків, якщо ймовірність ураження окремого літака дорівнює $\frac{4}{7}$, а всього літаків 13.

Розв'язання. Користуємося формулою (24):

$$np-q\le m_0\le np+p.$$

Тут: $n=13$, $p=\frac{4}{7}$, тоді $q=\frac{3}{7}$. Підставляємо ці дані у формулу

$$13\cdot\frac{4}{7}-\frac{3}{7}\le m_0\le 13\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{7}\Rightarrow 7\le m_0\le 8.$$

Тобто маємо два значення $m_0=7$, $m_0=8$, кожне з яких є найбільш імовірним числом збитих літаків.

Приклад 5. База обслуговує 12 магазинів. Від кожного з них заявка на товари на наступний день надходить з імовірністю 0,3. Знайти найбільш імовірну кількість заявок на наступний день і ймовірність того, що база одержить таку кількість заявок.

Розв'язання. Тут: $n=12$, $p=0,3$, $q=0,7$. Тоді $12\cdot 0,3-0,7\le m_0\le 12\cdot 0,3+0,3$ або $2,9\le m_0\le 3,9$. Звідси $m_0=3$.

Тобто найбільш ймовірна кількість заявок дорівнює трьом. Знайдемо тепер ймовірність того, що з дванадцяти магазинів три магазини надішлють заявки. Використаємо формулу Бернуллі. Тут: $n=12$, $m=3$, $p=0,3$, $q=0,7$.

$$P_n^m(A)=C_n^m p^m q^{n-m}\Rightarrow P_{12}^3(A)=C_{12}^3(0,3)^3(0,7)^9=220\cdot 0,027\cdot 0,0403\approx 0,239.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які випробування називають незалежними відносно події A?
2. Що таке схема Бернуллі?
3. Як записується формула Бернуллі?
4. Як записується формула Лапласа?
5. Як записується локальна теорема Лапласа?
6. У яких випадках застосовуються ці формули?
7. Як записується інтегральна формула Лапласа?
8. У яких таблицях зібрані значення функцій $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$?
9. Яка з цих функцій парна, а яка непарна?
10. Як обчислюється ймовірність відхилення відносної частоти від ймовірності?
11. У якому випадку найбільш ймовірне число m_0 – одне, а коли таких чисел два?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей [Текст] / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1969. – 576 с.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2003. – 479 с.

3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2004. – 404 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Кузнецов Віталій Миколайович
Бусарова Тетяна Миколаївна
Звонарьова Ольга Віталіївна
Агошкова Тетяна Анатоліївна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Методичні вказівки до виконання модульної роботи № 7

У двох частинах

Частина 1

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Редактор *О. О. Котова*

Комп'ютерна верстка *Т. В. Шевченко, Ю. С. Марков*

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 2,67. Обл.-вид. арк. 2,69.
Тираж 500 пр. Зам. № _____.

Видавництво Дніпропетровського національного університету
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Свідоцтво суб'єкта видавничої діяльності ДК № 1315 від 31.03.2003

Адреса видавництва та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2; Дніпропетровськ, 49010