МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ та ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ
Дніпропетровський національний університет
залізничного транспорту
імені академіка В.Лазаряна

Кафедра «Вища математика»

МОДУЛЬНЕ НАВЧАННЯ

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Методичні рекомендації для виконання
модульної роботи №1

Укладачі: Т.М.Бусарова
О.В.Звонарьова
В.П.Літвінов
Н.А.Мухіна

Для студентів I курсу усіх спеціальностей

Дніпропетровськ 2010

УДК 514.742.2

Укладачі:
Тетяна Миколаївна Бусарова, Ольга Віталіївна Звонарьова, Віталій Петрович Літвінов, Наталія Анатоліївна Мухіна

Рецензенти:
канд.. фіз.-мат. наук, доц. *А.В.Сясєв* (ДНУ)
канд. техн. наук, доц. *В.В.Колбун* (ДІІТ)

Векторна алгебра: Варіанти типового розрахунку. Методичні вказівки/ Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В.Лазаряна; Уклад: Т.М.Бусарова, О.В.Звонарьова, В.П.Літвінов, Н.А.Мухіна – Д.,2010 - с.

Методичні вказівки призначаються для студентів першого курсу усіх спеціальностей. Містять основні формули, необхідні теоретичні викладки, приклади розв’язку типових задач та варіанти контрольних робіт.

Друкується за рішенням методичної комісії будівельного факультету

Векторна алгебра

1. Основні поняття

Величина, яка характеризується деяким числовим значенням називається скалярною величиною.

Приклади скалярних величин: густина, робота, маса, температура.

Величина, яка характеризується не тільки деяким числовим значенням, а і певним напрямком у просторі називається векторною величиною. Геометричною інтерпретацією векторної величини є вектор – напрямлений відрізок.

Приклади векторних величин: сила, швидкість, прискорення.

Вектори записують або двома буквами латинського алфавіту: $\overline{AB}$ (A – початок вектора або точка прикладання вектора, B – кінець вектора), $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, або однією буквою: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Модулем (абсолютною величиною) вектора $\overline{AB}$ називають довжину відрізка AB. Позначається модуль так: $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{a}\right|$.

Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається нульовим вектором. Цей вектор позначають $\overline{0}$.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають колінеарними векторами. Колінеарність позначають символом $\|$: $\overline{a}\|\overline{b}$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним вектором.

Одиничний вектор, який колінеарний вектору $\overline{a}$ і має з ним однаковий напрям, називається ортом вектора $\overline{a}$ і позначається $\overline{a}^0$ ($\left|\overline{a}^0\right|=1$).

Вектори називаються рівними, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакові модулі.

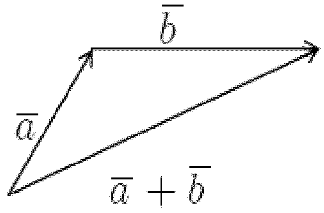
Колінеарні вектори називаються протилежними, якщо вони протилежно напрямлені і мають однакові модулі.

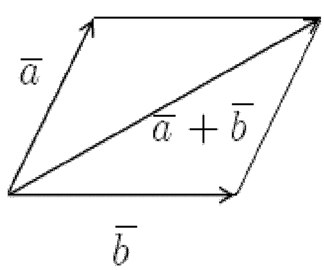
Вектори, які містяться в одній або паралельних площинах, називаються компланарними.

1.1 Лінійні операції над векторами

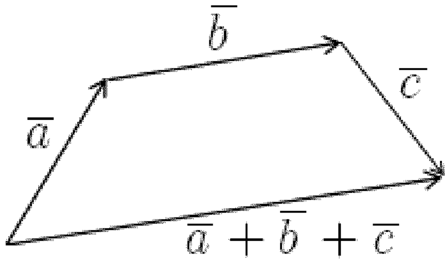
До лінійних операцій над векторами належать: додавання векторів, віднімання векторів і множення вектора на число.

Додавання двох векторів здійснюється за правилом трикутника або паралелограма.





Додавання n векторів ($n>2$) здійснюється за допомогою правила многокутника.



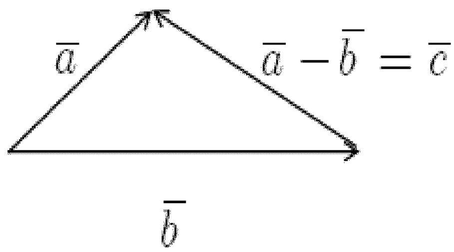
Властивості суми векторів:

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$

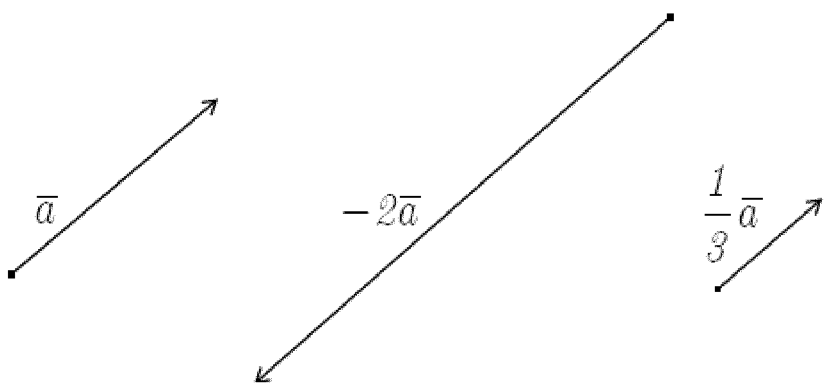
2) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$

3) $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}$

Різницею векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ($\overline{a}-\overline{b}$) є такий вектор $\overline{c}$, що $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.



Добутком вектора $\overline{a}$ на число λ називають вектор $\lambda\overline{a}$ такий, що $\left|\lambda\overline{a}\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\overline{a}\right|$ і напрям якого збігається з напрямом $\overline{a}$, якщо $\lambda>0$, або протилежний $\overline{a}$, якщо $\lambda<0$. Якщо $\left|\lambda\right|>1$, то вектор $\overline{a}$ «розтягується» в λ раз. Якщо $\left|\lambda\right|<1$, то $\overline{a}$ «стискається» в λ раз.



Властивості множення вектора на число:

1) $\lambda\overline{a} = \overline{a}\lambda$

2) $(\lambda_1 + \lambda_2)\overline{a} = \lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{a}$

3) $\lambda(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = \lambda\overline{a}_1 + \lambda\overline{a}_2$

4) $\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a}^0$ (нагадуємо, що $\overline{a}^0$ – орт вектора $\overline{a}$)

1.2 Лінійно – залежні і лінійно – незалежні вектори

Лінійною комбінацією векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається вектор $\overline{a} = \lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + \lambda_n \cdot \overline{a}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – числа, які називаються коефіцієнтами лінійної комбінації.

Система векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо рівність $\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + \lambda_n \cdot \overline{a}_n = 0$ можлива тоді, коли хоча б один із множників $\lambda_k \neq 0$ ($k = 1,2,3,...,n$).

Система векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається лінійно незалежною, якщо рівність $\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + \lambda_n \cdot \overline{a}_n = 0$ можлива лише тоді, коли всі $\lambda_k = 0$ ($k = 1,2,3,...,n$).

Мають місце такі твердження:

Два неколінеарні вектора – лінійно незалежні.

Три некомпланарних вектора – лінійно незалежні.

Необхідною і достатньою ознакою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.

Необхідною і достатньою ознакою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність.

1.3 Поняття векторного базису. Розкладання довільного вектора за векторним базисом

Розглянемо n лінійно незалежних векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$. Будемо вважати, що $\overline{e}_1$ – перший вектор, $\overline{e}_2$ – другий вектор,…, $\overline{e}_n$ – n-ий вектор. Таку сукупність векторів будемо називати упорядкованою.

Базисом лінійного простору називається така упорядкована сукупність лінійно незалежних векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$, що кожен вектор цього простору єдиним способом може бути зображений у вигляді їх лінійної комбінації.

Лінійний простір називається n-вимірним лінійним простором, якщо його базис складається із n векторів.

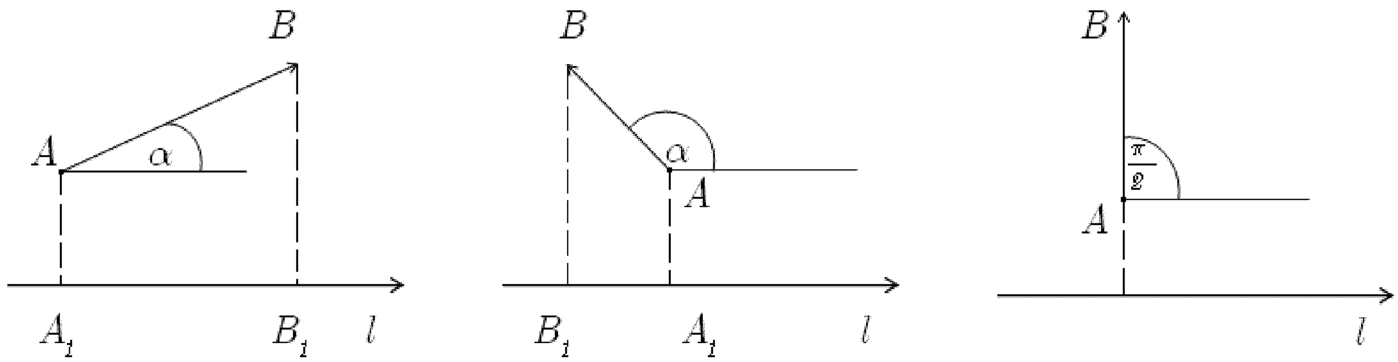
<u>Базис на площині</u> складається з двох неколінеарних векторів, взятих в певному порядку: $\overline{e}_1, \overline{e}_2$.

<u>Базис в тривимірному просторі</u> складається з трьох некомпланарних векторів, взятих в певному порядку: $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$.

Тобто кожний вектор $\overline{a}$ в тривимірному просторі можна представити у вигляді: $\overline{a} = \lambda_1 \overline{e}_1 + \lambda_2 \overline{e}_2 + \lambda_3 \overline{e}_3$ (у двовимірному просторі: $\overline{a} = \lambda_1 \overline{e}_1 + \lambda_2 \overline{e}_2$). Така рівність називається <u>розкладанням вектора</u> $\overline{a}$ за базисом $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ (розкладанням вектора $\overline{a}$ за базисом $\overline{e}_1, \overline{e}_2$). Вектори $\lambda_1 \overline{e}_1, \lambda_2 \overline{e}_2, \lambda_3 \overline{e}_3$ називаються <u>складовими</u> вектора $\overline{a}$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називаються <u>координатами (проекціями)</u> вектора $\overline{a}$ у базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$.

1.4 Проекція вектора на вісь

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l ($np_l \overline{AB}$) називається довжина відрізка $\overline{A_1 B_1}$, який сполучає проекції на цю вісь початку (A) і кінця (B) даного вектора, взята зі знаком «плюс», якщо кут α між вектором і віссю l (її додатнім напрямом) гострий, і знаком «мінус», якщо цей кут тупий. (Якщо $\overline{a} \perp l$, то $np_l \overline{a} = 0$)



Має місце теорема: проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь l дорівнює добутку довжини вектора $\overline{AB}$ на косинус кута між цим вектором і віссю l, тобто $np_l \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos\alpha$.

Основні властивості проекцій:

1) $np_l\left(\lambda \overline{a}\right) = \lambda \cdot np_l \overline{a}$

2) $np_l\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = np_l \overline{a} + np_l \overline{b}$

Питання для самоперевірки:

1. Які величини називаються скалярними? Приклади.
2. Які величини називаються векторними? Приклади.
3. Як геометрично зображується вектор?
4. Що таке: модуль вектора; нульовий вектор; одиничний вектор; орт вектора?

5. Які вектори називають рівними?

6. Що таке колінеарність і компланарність векторів?

7. У чому полягає правило трикутника (многокутника) при додаванні векторів?

8. Що таке різниця векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$?

9. Як виконується множення вектора на число?

10. Сформулюйте властивості суми векторів; властивості множення вектора на число.

11. Яка система векторів називається лінійно залежною? лінійно незалежною?

12. Що таке базис лінійного простору? (що таке базис в тривимірному просторі?)

13. Яка рівність називається розкладанням вектора за базисом в тривимірному просторі?

14. Що таке складові вектора? координати вектора?

15. Що називається проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l ?

16. Які основні властивості проекцій векторів на вісь?

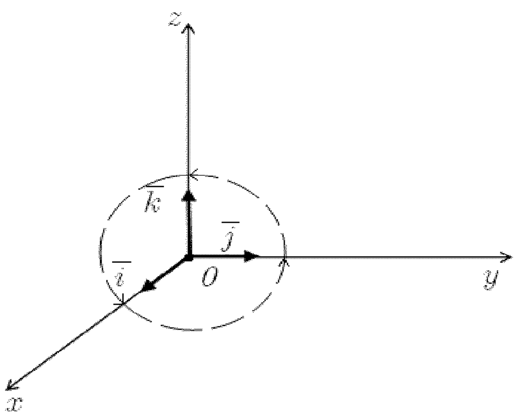
1.5 Прямокутна система координат. Розкладання вектора по базису. Модуль вектора, проекції вектора

Базисні вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ у прямокутній системі координат в просторі позначають через $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Ці вектори задовольняють умовам:

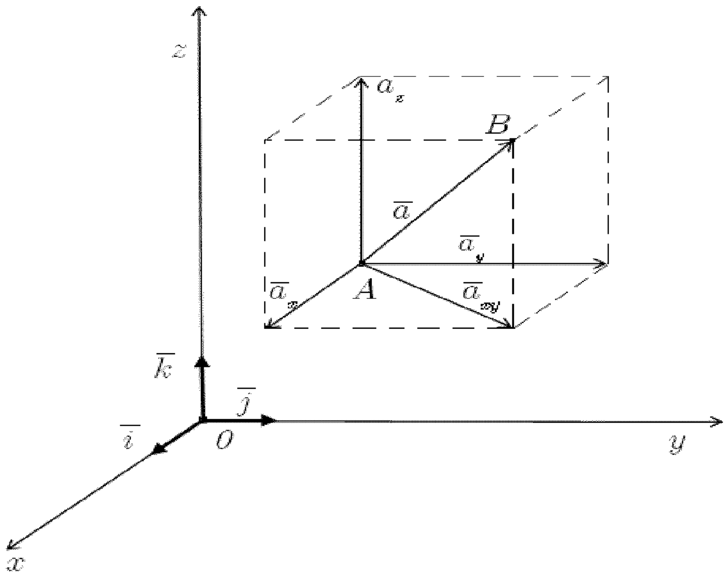
1) вектор $\overline{i}$ лежить на осі OX (перший вектор), вектор $\overline{j}$ – на осі OY (другий вектор), вектор $\overline{k}$ – на осі OZ (третій вектор);

2) кожний з векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ направлений по своїй осі в додатню сторону;

3) вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – одиничні, тобто $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$.



Прямокутні системи координат поділяються на праву і ліву. В правій системі за додатній напрям береться обертання «проти годинникової стрілки»: з кінця третього вектора $\overline{k}$ найкоротший поворот від першого вектора $\overline{i}$ до другого вектора $\overline{j}$ видно проти годинникової стрілки (тобто вектори $\overline{i}$, $\overline{j}$ і $\overline{k}$ утворюють праву трійку векторів). (В лівій системі – за годинниковою стрілкою.) Далі розглядатимемо тільки праві системи.



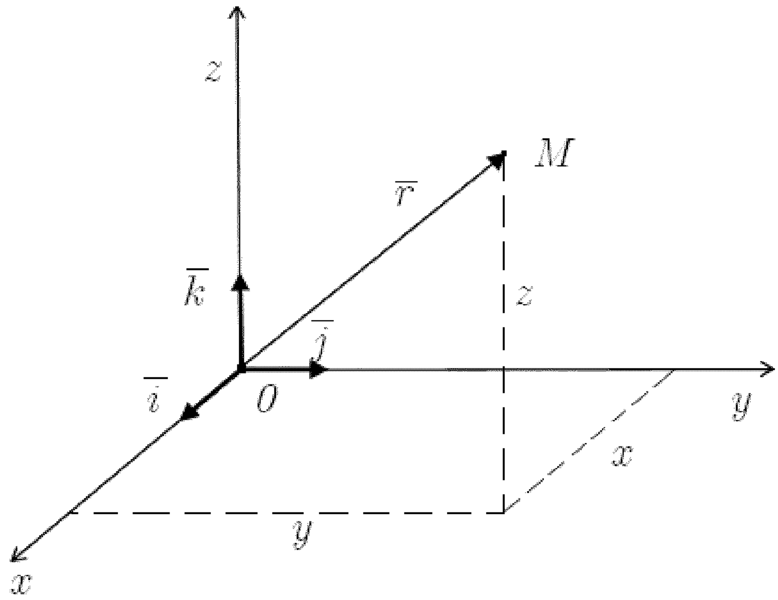
Розглянемо в просторі вектор $\overline{AB} = \overline{a}$. Розкладемо його на складові: $\overline{a}_{xy}$ – паралельну площині XOY і $\overline{a}_z$ – паралельну осі OZ. Тоді вектор $\overline{a}$ можна записати у вигляді суми цих складових: $\overline{a} = \overline{a}_{xy} + \overline{a}_z$. Тепер вектор $\overline{a}_{xy}$ розкладемо на складові: $\overline{a}_x$ – паралельну осі OX, $\overline{a}_y$ – паралельну осі OY. $\overline{a}_{xy} = \overline{a}_x + \overline{a}_y$. Тоді, $\overline{a} = \overline{a}_x + \overline{a}_y + \overline{a}_z$.

Вектори $\overline{a}_x, \overline{a}_y, \overline{a}_z$ називають <u>складовими</u> (<u>компонентами</u>) вект ора $\overline{a}$. Помітимо, що компонента $\overline{a}_x$ колінеарна вектору $\overline{i}$, тому існує скалярний множник a_x такий, що $\overline{a}_x = a_x \cdot \overline{i}$. Аналогічно, $\overline{a}_y = a_y \cdot \overline{j}$, $\overline{a}_z = a_z \cdot \overline{k}$. Тоді вектор $\overline{a}$ можна записати у вигляді:

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k} \qquad (1)$$

Цей вираз називається <u>розкладанням вектора за базисом $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$</u>. Числа a_x, a_y, a_z є <u>проекціями</u> вектора $\overline{a}$ на відповідні координатні осі. Ще їх називають координатами вектора. Той же вектор $\overline{a}$ можна записати таким чином: $\overline{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$.

Вектор $r = \overline{OM}$, який з'єднує початок координат з довільною точкою $M(x, y, z)$ простору, називається <u>радіус-вектором</u> точки M. Цей вектор можна записати так: $\overline{r} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$, або $\overline{r}\{x, y, z\}$.



Приклад. Заданий вектор $\overline{a}\{-3,5,1\}$. Записати його у вигляді (1).

Розв'язання. $\overline{a}=-3\overline{i}+5\overline{j}+\overline{k}$

Приклад. Заданий вектор $\overline{a}=4\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$. Знайти:

1) проекцію вектора на вісь OY;

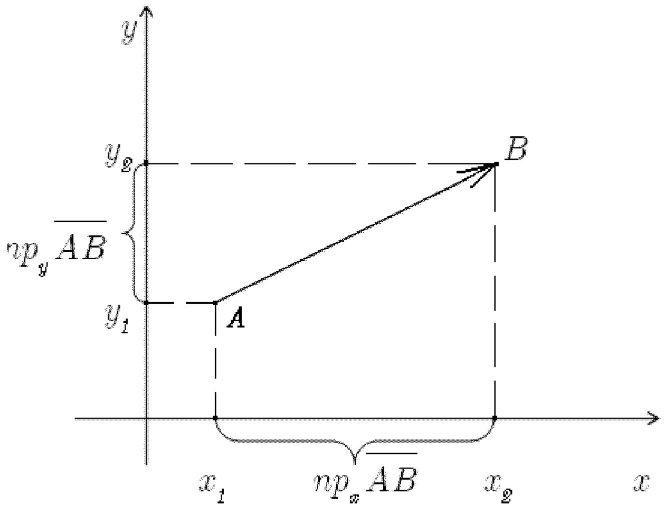
2) проекцію вектора на вісь OZ

Розв'язання. 1) $np_y\overline{a}=-1$

2) $np_z\overline{a}=2$

До речі, якщо деяка проекція вектора на вісь дорівнює нулю, то вектор перпендикулярний цій вісі. Наприклад, вектор $\overline{a}\{3,0,-4\}$ перпендикулярний вісі OY. У вигляді (1) він буде мати вид: $\overline{a}=3\overline{i}-4\overline{k}$. Помітимо, що вектор $\overline{a}$ заданий на площині XOY має вид: $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}$.

Розглянемо вектор $\overline{AB}$ (для спрощення рисунка – на площині XOY). Нехай $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.



Ясно, що $np_x\overline{AB} = x_2 - x_1$, $np_y\overline{AB} = y_2 - y_1$. Тоді $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\cdot\overline{i} + (y_2 - y_1)\cdot\overline{j}$.

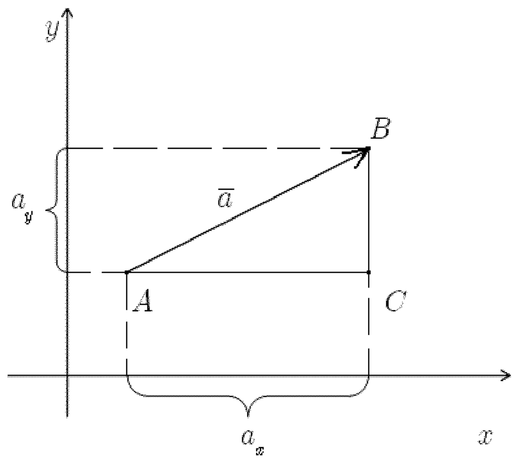
Якщо вектор $\overline{AB} = \overline{a}$ заданий у просторі, то $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\cdot\overline{i} + (y_2 - y_1)\cdot\overline{j} + (z_2 - z_1)\cdot\overline{k}$, де

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1 \qquad (2)$$

Приклад. Задані точки $A(4,0,-2)$, $B(1,3,7)$. Знайти вектор $\overline{AB} = \overline{a}$.

Розв'язання. За формулою (2): $a_x = x_2 - x_1 = 1 - 4 = -3$, $a_y = 3 - 0 = 3$, $a_z = 7 - (-2) = 9$. Тоді: $\overline{AB} = \overline{a} = -3\overline{i} + 3\overline{j} + 9\overline{k}$

Знайдемо довжину вектора $\overline{a}$ (знову для спрощення розглянемо спочатку вектор $\overline{a}$ на площині). Довжина (модуль) вектора $\overline{a}$ – це довжина гіпотенузи трикутника ABC: $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.



Якщо вектор $\overline{a}$ задано у просторі, то модуль вектора $\overline{a}$ буде обчислюватись за формулою:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (3)$$

Приклад. Обчислити модуль вектора $\overline{a}\{7,2,-1\}$.

Розв’язання. За формулою (3): $|\overline{a}|=\sqrt{7^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{49+4+1}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

1.6 Лінійні операції над векторами, заданими проекціями

Виконуються лінійні операції за допомогою наступних правил:

1) при додаванні (відніманні) векторів додаються (віднімаються) їх однойменні координати: $\overline{a}\pm\overline{b}\{a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z\}$;

2) при множенні вектора на число його координати множаться на це число: $\lambda\overline{a}\{\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z\}$.

Приклад. Задані вектори $\overline{a}\{-4,1,3\}$, $\overline{b}\{5,-2,-3\}$. Знайти: 1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $-2\overline{b}$; 3) $3\overline{a}+\overline{b}$.

Розв’язання. 1) $\overline{a}+\overline{b}\{-4+5;1-2;3-3\}$, тобто $\overline{a}+\overline{b}\{1;-1;0\}$, або $\overline{a}+\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}$

2) $-2\overline{b}\{-10;4;6\}$, або $-2\overline{b}=-10\overline{i}+4\overline{j}+6\overline{k}$

3) $3\overline{a}+\overline{b}\{-7;1;6\}$, або $3\overline{a}+\overline{b}=-7\overline{i}+\overline{j}+6\overline{k}$

Помітимо, що вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати: $\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_x=b_x\\a_y=b_y\\a_z=b_z\end{cases}$

Розглянемо тепер ознаку колінеарності векторів. Нехай $\overline{a}\{a_x,a_y,a_z\}$, $\overline{b}\{b_x,b_y,b_z\}$. Тоді умова $\overline{a}\|\overline{b}$ рівносильна умові $\overline{a}=\lambda\overline{b}$, тобто $\{a_x,a_y,a_z\}=\{\lambda b_x,\lambda b_y,\lambda b_z\}$. Звідси:

$$a_x=\lambda b_x$$
$$a_y=\lambda b_y$$
$$a_z=\lambda b_z$$

Знайшовши λ з кожного співвідношення, дістанемо:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \tag{4}$$

Ці рівності виражають <u>ознаку колінеарності векторів</u>.

Приклад. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\overline{a}\{\alpha,4,-1\}$ і $\overline{b}\{-6,\beta,2\}$ будуть колінеарні.

Розв'язання. За умовою колінеарності двох векторів (формула 4) $\frac{\alpha}{-6}=\frac{4}{\beta}=\frac{-1}{2}$.

Звідси $\frac{\alpha}{-6}=\frac{-1}{2}$, $\alpha=3$

$\frac{4}{\beta}=\frac{-1}{2}$, $\beta=-8$

1.7 Напрямні косинуси вектора

Розглянемо вектор $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$. Позначимо кути між вектором $\overline{a}$ і осями координат наступним чином:

$$\left(\overline{a}\wedge OX\right)=\alpha$$
$$\left(\overline{a}\wedge OY\right)=\beta$$
$$\left(\overline{a}\wedge OZ\right)=\gamma$$

Тоді $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ називають напрямними косинусами вектора $\overline{a}$.

Запишемо проекції вектора $\overline{a}$ на осі координат: $a_x=\left|\overline{a}\right|\cos\alpha$, $a_y=\left|\overline{a}\right|\cos\beta$, $a_z=\left|\overline{a}\right|\cos\gamma$. Звідси

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|} \tag{5}$$

Напрямні косинуси пов'язані між собою співвідношенням:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{6}$$

Справді, $\frac{{a_x}^2}{\left|\overline{a}\right|^2}+\frac{{a_y}^2}{\left|\overline{a}\right|^2}+\frac{{a_z}^2}{\left|\overline{a}\right|^2}=\frac{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}{\left|\overline{a}\right|^2}=1$

Якщо вектор $\overline{a}$ заданий на площині XOY, то $\gamma=\frac{\pi}{2},a_z=0$ і напрямні косинуси зв'язані співвідношенням: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$.

Приклад. Обчислити напрямні косинуси вектора $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k}$.

Розв'язання. Знайдемо модуль вектора $\overline{a}$: $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}=\sqrt{38}$, тоді за формулою (5) $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{38}}$, $\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{38}}$, $\cos\gamma=\frac{5}{\sqrt{38}}$

Перелічимо основні формули і твердження цієї теми.

Вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ утворюють базис у прямокутній системі координат. Яким би не був вектор $\overline{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, він завжди може бути «розкладений» по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, тобто може бути представлений у виді: $\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}$.

Якщо $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$, то вектор $\overline{AB} = \overline{a}$ можна записати у вигляді:

$\overline{AB} = \left(x_2 - x_1\right) \cdot \overline{i} + \left(y_2 - y_1\right) \cdot \overline{j} + \left(z_2 - z_1\right) \cdot \overline{k}$, де

$$x_2 - x_1 = np_x \overline{AB} = a_x$$

$$y_2 - y_1 = np_y \overline{AB} = a_y$$

$$z_2 - z_1 = np_z \overline{AB} = a_z$$

Модуль вектора $\overline{a}$ обчислюється за формулою: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.

Додавання векторів:

$$\overline{a} + \overline{b}\left\{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\right\}$$

Віднімання векторів:

$$\overline{a} - \overline{b}\left\{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\right\}$$

Множення вектора на число:

$$\lambda\overline{a}\left\{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\right\}$$

Ознака колінеарності векторів:

$$\overline{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\},\ \overline{b}\left\{b_x, b_y, b_z\right\}$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Проекції вектора $\overline{a}$ на осі координат:

$$a_x = \left|\overline{a}\right| \cos\alpha,\ a_y = \left|\overline{a}\right| \cos\beta,\ a_z = \left|\overline{a}\right| \cos\gamma$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називають напрямними косинусами вектора $\overline{a}$. α – кут між вектором і додатнім напрямом осі OX; β – кут між вектором і додатнім напрямом осі OY; γ – кут між вектором і додатнім напрямом осі OZ.

Напрямні косинуси зв’язані співвідношенням: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Якщо вектор $\overline{a}$ заданий на площині XOY, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ та їх довжину, якщо $A(0;3;-2)$, $B(4;1;5)$.

Розв'язання. $\overline{AB}\{4-0;1-3;5-(-2)\}$ або $\overline{AB}\{4;-2;7\}$; $\overline{BA}\{0-4;3-1;-2-5\}$ або $\overline{BA}\{-4;2;-7\}$.

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BA}\right| = \sqrt{16+4+49} = \sqrt{69}$$

Зауваження. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ протилежні. Вони мають однакові модулі, а проекції відрізняються знаком. Тому, в подальшому, по відомому вектору $\overline{AB}$ можна зразу записати і вектор $\overline{BA}$.

Приклад 2. Дано: $M(4;0;-3)$, $N(2;-3;5)$. Знайти проекції вектора $\overline{MN}$ на осі координат.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\overline{MN}$: $\overline{MN}\{-2;-3;8\}$. Тоді $np_x\overline{MN} = -2$; $np_y\overline{MN} = -3$; $np_z\overline{MN} = 8$

Приклад 3. Дано: $\overline{AB} = 4\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, $A(3;1;-2)$. Знайти координати точки B.

Розв'язання. Відомо, що $np_x\overline{AB} = x_2 - x_1$, $np_y\overline{AB} = y_2 - y_1$, $np_z\overline{AB} = z_2 - z_1$. Координати точки A відомі: $x_1 = 3$, $y_1 = 1$, $z_1 = -2$. Проекції вектора $\overline{AB}$ відомі: $np_x\overline{AB} = 4$, $np_y\overline{AB} = -1$, $np_z\overline{AB} = 2$. Тоді:

$$x_2 = np_x\overline{AB} + x_1 = 4 + 3 = 7$$

$$y_2 = np_y\overline{AB} + y_1 = -1 + 1 = 0$$

$$z_2 = np_z\overline{AB} + z_1 = 2 + (-2) = 0.$$

Таким чином, $B(7;0;0)$.

Приклад 4. Дано: $\overline{MN}\{-3;1;0\}$, $N(5;3;-1)$. Знайти координати точки M.

Розв'язання. Використаємо формули попереднього приклада. Але тепер нам потрібно знайти координати точки $M(x_1, y_1, z_1)$.

$x_1 = x_2 - np_x \overline{MN} = 5 - (-3) = 8$

$y_1 = y_2 - np_y \overline{MN} = 3 - 1 = 2$

$z_1 = z_2 - np_z \overline{MN} = -1 - 0 = -1$

Координати точки $M(8;2;-1)$.

Приклад 5. Дано: $\overline{a}\{4;-2;1\}$, $\overline{b}\{0;8;6\}$. Знайти: 1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{a}-\overline{b}$; 3) $3\overline{a}$; 4) $\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$

Розв’язання. 1) $\overline{a}+\overline{b}\{4+0;-2+8;1+6\}=\{4;6;7\}$; 2) $\overline{a}-\overline{b}\{4;-10;-5\}$; 3) $3\overline{a}\{12;-6;3\}$; 4) $\frac{1}{2}\overline{b}\{0;4;3\}$, тоді $\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}\{4;-6;-2\}$

Приклад 6. Дано: $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{k}$, $\overline{b}=3\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$. Знайти: 1) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$; 2) $\left|2\overline{a}-\overline{b}\right|$.

Розв’язання. Запишемо задані вектори в зручному виді: $\overline{a}\{2;0;-3\}$, $\overline{b}\{3;1;2\}$.

1) Спочатку знайдемо вектор $\overline{a}+\overline{b}$. $\overline{a}+\overline{b}\{5;1;-1\}$. Тепер знайдемо модуль цього вектора: $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\sqrt{25+1+1}=\sqrt{27}$.

2) Аналогічно: $2\overline{a}-\overline{b}\{1;-1;-8\}$

$$\left|2\overline{a}-\overline{b}\right|=\sqrt{1+1+64}=\sqrt{66}$$

Приклад 7. Задано вектор $\overline{PQ}\{3;4;-2\}$. Знайти напрямні косинуси вектора.

Розв’язання. Знайдемо модуль вектора $\overline{PQ}$. $\left|\overline{PQ}\right|=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$. Тоді, за формулою (5) $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{29}}$, $\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{29}}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{29}}$

Приклад 8. Визначити, при яких значеннях α_1 і α_2 вектори $\overline{a}=3\overline{i}-5\overline{j}+\alpha_1\overline{k}$ і $\overline{b}=2\overline{i}+\alpha_2\overline{j}+4\overline{k}$ колінеарні.

Розв’язання. $\overline{a}\{3;-5;\alpha_1\}$, $\overline{b}\{2;\alpha_2;4\}$. За означенням колінеарності $\frac{3}{2}=\frac{-5}{\alpha_2}=\frac{\alpha_1}{4}$.

Звідси: $\frac{3}{2}=\frac{-5}{\alpha_2}$, $\alpha_2=-\frac{10}{3}$

$\frac{3}{2}=\frac{\alpha_1}{4}$, $\alpha_1=6$

Приклад 9. Знайти координати вектора $\overline{c}$, якщо відомі кути $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$ і його довжина $|\overline{c}| = 2$.

Розв'язання. $\cos\alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos\gamma = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$. Тоді,

$c_x = |\overline{c}|\cos\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; $c_y = |\overline{c}|\cos\beta = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$; $c_z = |\overline{c}|\cos\gamma = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Таким чином, $\overline{c}\left\{\sqrt{2};1;-1\right\}$.

Приклад 10. Вектор $\overline{a}$ утворює з осями OX і OY кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Який кут γ він утворює з віссю OZ (якщо $\gamma > 0$)?

Розв'язання. За співвідношенням (6) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ маємо: $\cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2\gamma = 1$. Оскільки $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$\cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. $\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$. За умовою $\gamma > 0$, тому $\gamma = 60^\circ$.

Розділ II

Приклад 1. Довести, що точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$ і $D(3;-5;3)$ є вершинами трапеції.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$. А потім перевіримо, чи будуть вони колінеарні. $\overline{AB}\{-2;3;-3\}$, $\overline{CD}\{4;-6;6\}$. Застосуємо умову колінеарності $\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$. Дійсно вектори колінеарні і задані точки є вершинами трапеції.

Приклад 2. Дано точки: $M(-1;5;-10)$, $N(5;-7;8)$, $P(2;2;-7)$ і $Q(5;-4;2)$. Довести, що вектори $\overline{MN}$ і $\overline{PQ}$ колінеарні. Встановити, який з них довше і в скільки раз; як вони направлені – в одну чи в протилежні сторони.

Розв'язання. Знайдемо вектори:

$\overline{MN} = \overline{\{6;-12;18\}}$

$\overline{PQ} = \overline{\{3;-6;9\}}$

За ознакою колінеарності: $\frac{6}{3} = \frac{-12}{-6} = \frac{18}{9} = 2$

Дійсно, вектори $\overline{MN}$ і $\overline{PQ}$ колінеарні.

Знайдемо їх модулі:

$$\left|\overline{MN}\right| = \sqrt{6^2 + (-12)^2 + (18)^2} = \sqrt{36 + 144 + 324} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 36 + 81} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

Таким чином, вектор $\overline{MN}$ (довжина якого $6\sqrt{14}$) в два рази довше вектора $\overline{PQ}$ (довжина якого $3\sqrt{14}$). Так як відповідні проекції векторів мають однакові знаки, то вектори направлені в одну сторону.

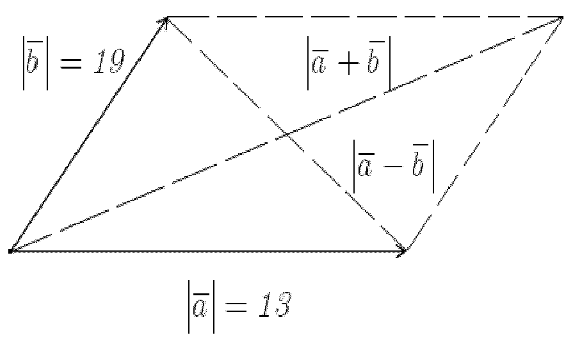
Приклад 3. Перевірити, чи будуть утворювати два вектора $\overline{a} = 5\overline{i} - \overline{j}$ і $\overline{b} = -10\overline{i} + 2\overline{j}$ (в двовимірному просторі) базис?

Розв'язання. Базис на площині складається з двох неколінеарних векторів. Перевіримо вектори на колінеарність:

$\overline{a}\{5;-1\}$, $\overline{b}\{-10;2\}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{5}{-10} = \dfrac{-1}{2}$ $\Rightarrow$ вектори колінеарні, а тому вони базис не утворюють.

Приклад 4. Дано: $\left|\overline{a}\right| = 13$, $\left|\overline{b}\right| = 19$, $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 24$. Обчислити $\left|\overline{a} - \overline{b}\right|$.

Розв'язання. Побудуємо паралелограм зі сторонами $\left|\overline{a}\right| = 13$, $\left|\overline{b}\right| = 19$.



Тоді $\left|\overline{a} + \overline{b}\right|$ і $\left|\overline{a} - \overline{b}\right|$ – це діагоналі паралелограма. Застосуємо теорему: сума квадратів сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей.

$$2\left|\overline{a}\right|^2 + 2\left|\overline{b}\right|^2 = \left|\overline{a} + \overline{b}\right|^2 + \left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2$$

$$2 \cdot 169 + 2 \cdot 361 = 576 + \left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2$$

$$1060 = 576 + \left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2$$

Звідси, $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|^2 = 484$, $\left|\overline{a}-\overline{b}\right| = 22$

Приклад 5. Дано вектор $\overline{c} = 4\overline{i} + 7\overline{j} - 4\overline{k}$. Знайти вектор $\overline{d}$ колінеарний вектору $\overline{c}$ і протилежно направлений, якщо $\left|\overline{d}\right| = 27$.

Розв'язання. Якщо вектори колінеарні, то їх проекції пропорційні. $\overline{c}\{4;7;-4\}$, тоді $\overline{d}\{4\alpha;7\alpha;-4\alpha\}$, де α –коефіцієнт пропорційності. Застосуємо формулу обчислення довжини вектора: $\left|\overline{d}\right| = 27 = \sqrt{16\alpha^2 + 49\alpha^2 + 16\alpha^2} = \sqrt{81\alpha^2}$; $\alpha = \pm 3$. За умовою приклада вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$ протилежно направлені, тому $\alpha = -3$. Тоді $\overline{d}\{-12;-21;12\}$ або $\overline{d} = -12\overline{i} - 21\overline{j} + 12\overline{k}$.

Приклад 6. Задані вектори $\overline{a} = 4\overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{b} = -3\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} + 6\overline{j} - 3\overline{k}$. Знайти: 1) орт вектора $\overline{a}$, тобто $\overline{a}^\circ$; 2)координати вектора $\overline{a} - 2\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}$; 3) $np_z\left(\overline{a}+\overline{b}\right)$; 4) $\cos\beta$ вектора $\overline{c} - 2\overline{b}$.

Розв'язання. 1) За означенням $\overline{a}^\circ = \dfrac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}$. Тому $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{16+9+0} = 5$. Тоді $\overline{a}^\circ\left\{\frac{4}{5};\frac{3}{5};0\right\}$

2) Знайдемо $2\overline{b}\{0;-6;-4\}$ і $\frac{1}{3}\overline{c}\{1;2;-1\}$. Тоді $\overline{a} - 2\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}\{5;11;3\}$

3) Знайдемо вектор $\overline{a}+\overline{b}\{4;0;-2\}$. Тоді проекція цього вектора на вісь OZ дорівнює -2

4) Знайдемо вектор $\overline{c} - 2\overline{b}\{3;12;1\}$. Знайдемо модуль цього вектора:

$$\left|\overline{c} - 2\overline{b}\right| = \sqrt{9+144+1} = \sqrt{154},\ \text{а}\ \cos\beta = \frac{np_y\left(\overline{c} - 2\overline{b}\right)}{\left|\overline{c} - 2\overline{b}\right|} = \frac{12}{\sqrt{154}}.$$

Питання для самоперевірки:

1. Як заведено позначати базисні вектори в прямокутній системі координат? Яким умовам задовольняють ці вектори?

2. Що таке компоненти вектора?

3. Який вид має формула розкладання вектора $\overline{a}$ по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$? Що таке a_x, a_y, a_z?

4. Як записати вектор у координатній формі, якщо відомі координати його початку $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінця $B(x_2, y_2, z_2)$? Чому дорівнюють проекції вектора $\overline{AB}$ на координатні осі?

5. За якою формулою знаходиться довжина (модуль) вектора $\overline{a}$?

6. Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі (додавання векторів, віднімання векторів, множення вектора на число)?

7. Як записується ознака колінеарності векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$?

8. Що таке кути α, β і γ?

9. За якою формулою обчислюються напрямні косинуси вектора? Якому співвідношенню вони задовольняють?

2. Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\left(\overline{a} \wedge \overline{b}\right) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi \tag{7}$$

Скалярний добуток позначають ще так: $\left(\overline{a}\overline{b}\right)$ або $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Приклад. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знайти скалярний добуток векторів, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$.

Розв'язання. За формулою (7) $\overline{a}\overline{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Помітимо, що $|\overline{b}|\cos\varphi = np_{\overline{a}}\overline{b}$, $|\overline{a}|\cos\varphi = np_{\overline{b}}\overline{a}$. Підставивши ці співвідношення у формулу (7), дістанемо ще одну формулу скалярного добутку:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| np_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| np_{\overline{b}}\overline{a} \tag{8}$$

Звідси

$$np_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}|}, \qquad np_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{b}|} \tag{9}$$

Зауваження. Якщо в формулі (7) покласти $\overline{b} = \overline{a}$, то одержимо:

$\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cos 0^\circ=|\overline{a}|^2$, тобто $\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$. Отже, скалярний квадрат вектора дорівнює квадратові його довжини.

$$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2, \text{ звідси } |\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2} \tag{10}$$

Помітимо, що $\overline{i}\cdot\overline{i}=\overline{i}^2=|\overline{i}|^2=1$, $\overline{j}\cdot\overline{j}=\overline{j}^2=|\overline{j}|^2=1$, $\overline{k}\cdot\overline{k}=\overline{k}^2=|\overline{k}|^2=1$.

Приклад. Дано: $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=3$, $\overline{a}\wedge\overline{b}=\frac{\pi}{3}$. Знайти $|\overline{a}+\overline{b}|$.

Розв’язання. За формулою (10): $|\overline{a}+\overline{b}|=\sqrt{(\overline{a}+\overline{b})^2}=\sqrt{\overline{a}^2+2\overline{a}\overline{b}+\overline{b}^2}$. Обчислимо суму під коренем: $\overline{a}^2=|\overline{a}|^2=4$, $\overline{b}^2=|\overline{b}|^2=9$, $\overline{a}\overline{b}=2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=3$. Тоді, $|\overline{a}+\overline{b}|=\sqrt{4+2\cdot 3+9}=\sqrt{19}$.

2.1 Властивості скалярного добутку

Алгебраїчні властивості:

1. $\overline{a}\overline{b}=\overline{b}\overline{a}$
2. $(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}$
3. $(\lambda\overline{a})\overline{b}=\lambda(\overline{a}\overline{b})$

Геометричні властивості:

1. Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ <u>ненульові</u> і $\overline{a}\overline{b}=0$, то $\overline{a}\perp\overline{b}$. Правильне і обернене твердження: якщо $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi=0$ і $\overline{a}\overline{b}=0$. Звідси $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{j}\cdot\overline{i}=0$, тому, що $\overline{i}\perp\overline{j}$; $\overline{i}\cdot\overline{k}=\overline{k}\cdot\overline{i}=0$, тому, що $\overline{i}\perp\overline{k}$; $\overline{j}\cdot\overline{k}=\overline{k}\cdot\overline{j}=0$, тому, що $\overline{j}\perp\overline{k}$. Отже, якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то вектори взаємно перпендикулярні, і навпаки, якщо вектори взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.
2. $\overline{a}\overline{b}>0$, якщо $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.
3. $\overline{a}\overline{b}<0$, якщо $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$.
4. Якщо $\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$ (в цьому випадку $\cos\varphi=1$, $\varphi=0$), то вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні і збігаються за напрямом.

2.2 Скалярний добуток векторів у координатній формі

Крім формул (7) і (8), існує ще одна формула знаходження скалярного добутку.

Нехай $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$. Знайдемо $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$\overline{a}\overline{b} = \left(a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}\right)\left(b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}\right) = a_x b_x \underbrace{\overline{i} \cdot \overline{i}}_{=1} + a_x b_y \underbrace{\overline{i} \cdot \overline{j}}_{=0} + a_x b_z \underbrace{\overline{i} \cdot \overline{k}}_{=0} + a_y b_x \underbrace{\overline{j} \cdot \overline{i}}_{=0} +$$

$$+ a_y b_y \underbrace{\overline{j} \cdot \overline{j}}_{=1} + a_y b_z \underbrace{\overline{j} \cdot \overline{k}}_{=0} + a_z b_x \underbrace{\overline{k} \cdot \overline{i}}_{=0} + a_z b_y \underbrace{\overline{k} \cdot \overline{j}}_{=0} + a_z b_z \underbrace{\overline{k} \cdot \overline{k}}_{=1} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Таким чином дістаємо:

$$\overline{a}\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{11}$$

Приклад. Дано вектори: $\overline{a} = \overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$. Знайти $\overline{a}\overline{b}$.

Розв’язання. $\overline{a}\{1;-3;5\}$, $b\{2;1;3\}$. Тоді за формулою (11) будемо мати: $\overline{a}\overline{b} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 14$

2.3 Кут між векторами. Умова перпендикулярності двох векторів

Нехай $\overline{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, $\overline{b}\left\{b_x, b_y, b_z\right\}$.

За означенням (7) $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cos\varphi$.

Звідси $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right|}$ або

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \tag{12}$$

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ перпендикулярні, то $\overline{a}\overline{b} = 0$ або

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \tag{13}$$

Співвідношення (13) визначає умову перпендикулярності векторів.

Приклад. Обчислити кут між векторами $\overline{a}\{-3;2;6\}$ і $\overline{b}\{2;-4;4\}$.

Розв’язання. За формулою (12) маємо

$$\cos\varphi = \frac{(-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + 6 \cdot 4}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{5}{21}.$$ Звідси $\varphi = \arccos\dfrac{5}{21}$.

Приклад. Визначити, при якому значенні α, вектори $\overline{a} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\alpha\overline{k}$ і $\overline{b} = 3\overline{i} - \alpha\overline{j} + \overline{k}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Застосуємо умову перпендикулярності векторів (13): якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні.

$\overline{a}\{-1;2;3\alpha\}$, $\overline{b}\{3;-\alpha;1\}$

$\overline{a}\overline{b} = -1\cdot 3 + 2\cdot(-\alpha) + 3\alpha\cdot 1 = -3 - 2\alpha + 3\alpha = 0 \qquad \alpha = 3$

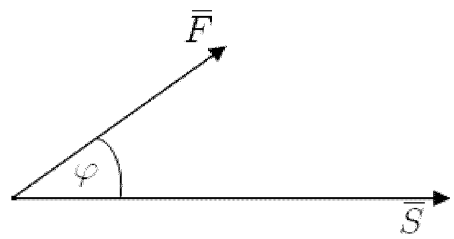
Таким чином, вектори будуть перпендикулярними, якщо $\alpha = 3$.

2.4 Фізичний зміст скалярного добутку векторів

Якщо вектор $\overline{F}$ – це сила, точка прикладання якої переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}$, то робота A цієї сили обчислюється за формулою:

$$A = \overline{F}\cdot\overline{S} \tag{14}$$

Тобто, робота – це скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення.



Приклад. Обчислити, яку роботу виконує сила $\overline{F}\{2;1;-2\}$, коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується із точки $M(1;-3;2)$ в точку $N(3;0;4)$.

Розв'язання. Знайдемо вектор переміщення $\overline{MN}$: $\overline{MN}\{3-1;0-(-3);4-2\} = \{2;3;2\}$.

Роботу обчислюємо за формулою (14):

$A = \overline{F}\cdot\overline{MN} = 2\cdot 2 + 1\cdot 3 + (-2)\cdot 2 = 4 + 3 - 4 = 3$.

<u>Перелічимо основні формули цієї теми.</u>

Дано два вектора: $\overline{a}\{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{b}\{b_x, b_y, b_z\}$.

Скалярний добуток векторів можна обчислити за формулами:

$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi$

$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}|\,np_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\,np_{\overline{b}}\overline{a}$

$\overline{a}\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Проекція вектора $\overline{a}$ на напрям вектора $\overline{b}$:

$np_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{b}|}$

Скалярний квадрат вектора $\overline{a}$:

$\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$, звідси $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2}$

Кут між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}$$

Умова перпендикулярності векторів:

$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

Фізичний зміст скалярного добутку – робота:

$A = \overline{F} \cdot \overline{S}$, де $\overline{F}$ – вектор сили, $\overline{S}$ – вектор переміщення.

Розв’язання прикладів.

Розділ І (найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо

1) $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, $\overline{a} \wedge \overline{b} = 60^\circ$;

2) $\overline{a}\{3;4;-1\}$, $\overline{b}\{2;-1;0\}$

3) $\overline{a} = -\overline{i} + 4\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{j} + 3\overline{k}$

Розв’язання. 1) Скористуємося формулою (7):

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

2) Скористуємося формулою (11):

$$\overline{a}\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 6 - 4 = 2$$

3) $\overline{a}\{-1;0;4\}$, $\overline{b}\{0;1;3\}$. Тоді за тією ж формулою (11): $\overline{a}\overline{b} = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 12$

Приклад 2. Знайти косинус кута і сам кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$, якщо:

1) $\overline{p}\overline{q} = 22$, $|\overline{p}| = 6$, $|\overline{q}| = 5$

2) $\overline{p}\overline{q} = -6$, $|\overline{p}| = 4$, $|\overline{q}| = 3$

3) $\overline{p}\{1;2;3\}$, $\overline{q}\{-1;1;0\}$

Розв'язання. В усіх трьох прикладах будемо застосовувати формулу (12):
$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}\cdot\sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2} + b_z^{\,2}}}.$$

Ясно, що для векторів $\overline{p}$ і $\overline{q}$ ця формула буде мати вид: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{p}\cdot\overline{q}}{\left|\overline{p}\right|\left|\overline{q}\right|}$

1) $\cos\varphi = \dfrac{22}{6\cdot 5} = \dfrac{11}{15}$, тоді $\varphi = \arccos\dfrac{11}{15}$

2) $\cos\varphi = \dfrac{-6}{4\cdot 3} = -\dfrac{1}{2}$, $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ або $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$

3) Знайдемо, спочатку, складові формули (12): $\overline{p}\cdot\overline{q} = -1 + 2 + 0 = 1$ (за формулою (11)); $\left|\overline{p}\right| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; $\left|\overline{q}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

Тоді $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{28}}$. Звідси $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{28}}$

Приклад 3. Задані вектори $\overline{a}\left\{-2;4;3\right\}$ і $\overline{b}\left\{3;3;2\right\}$. Знайти $np_{\overline{b}}\overline{a}$.

Розв'язання. Скористуємося формулою (9): $np_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}$. Знайдемо чисельник і знаменник формули:

$\overline{a}\overline{b} = -6 + 12 + 6 = 12$

$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$

Тоді $np_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{12}{\sqrt{22}}$

Приклад 4. При якому значенні α вектори $\overline{a} = \alpha\overline{i} + 2\overline{k}$ і $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ будуть перпендикулярними.

Розв'язання. Умова перпендикулярності (13): скалярний добуток повинен дорівнювати нулю, тобто $\overline{a}\overline{b} = \alpha\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 3 = 0$, $\alpha + 6 = 0$, $\alpha = -6$.

Розділ II

Приклад 1. Задані вектори $\overline{c} = \overline{i} + 2\overline{k}$, $\overline{d} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$. Знайти $np_{\overline{c}}\left(2\overline{c} - \overline{d}\right)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо вектор $2\overline{c}-\overline{d}$: $\overline{c}\left\{1;0;2\right\}$, $\overline{d}\left\{2;-1;1\right\}$, $2\overline{c}\left\{2;0;4\right\}$, $2\overline{c}-\overline{d}\left\{2-2;0-\left(-1\right);4-1\right\}=\left\{0;1;3\right\}$. Позначимо новий вектор $2\overline{c}-\overline{d}=\overline{a}$. Тепер застосуємо формулу скалярного добутку: $\overline{c}\cdot\overline{a}=\left|\overline{c}\right|\cdot np_{\overline{c}}\overline{a}$. Звідси $np_{\overline{c}}\overline{a}=\dfrac{\overline{c}\cdot\overline{a}}{\left|\overline{c}\right|}$.

$$np_{\overline{c}}\overline{a}=np_{\overline{c}}\left(2\overline{c}-\overline{d}\right)=\frac{1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 3}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Приклад 2. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{p}$ і $\overline{q}$, якщо $\overline{p}=\overline{m}+\overline{q}$, $\left|\overline{m}\right|=1$, $\left|\overline{q}\right|=4$, $\overline{m}\,\hat{}\,\overline{q}=\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання. $\overline{p}\cdot\overline{q}=\left(\overline{m}+\overline{q}\right)\overline{q}=\overline{m}\cdot\overline{q}+\overline{q}^2=\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{q}\right|\cos\dfrac{\pi}{3}+\left|\overline{q}\right|^2=1\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2}+16=18$

Приклад 3. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a}=3\overline{b}-2\overline{d}$, $\left|\overline{b}\right|=3$, $\left|\overline{d}\right|=1$, $\overline{b}\,\hat{}\,\overline{d}=\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

$$\overline{a}\overline{b}=\left(3\overline{b}-2\overline{d}\right)\overline{b}=3\overline{b}^2-2\overline{d}\cdot\overline{b}=3\left|\overline{b}\right|^2-2\left|\overline{d}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\frac{\pi}{2}=3\cdot 9-2\cdot 1\cdot 3\cdot 0=27$$

Приклад 4. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. $\left|\overline{a}\right|=5$, $\left|\overline{b}\right|=2$. Обчислити: 1) $\overline{a}^2$; 2) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2$; 3) $\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)\left(\overline{a}+\overline{b}\right)$.

Розв'язання. 1) За формулою (10): $\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|^2=25$;

2) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2=\overline{a}^2+2\overline{a}\overline{b}+\overline{b}^2=\left|\overline{a}\right|^2+2\overline{a}\overline{b}+\left|\overline{b}\right|^2=25+10\sqrt{2}+4=29+10\sqrt{2}$;

3) $\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\overline{a}^2-2\overline{a}\overline{b}+\overline{a}\overline{b}-2\overline{b}^2=\left|\overline{a}\right|^2-\overline{a}\overline{b}-2\left|\overline{b}\right|^2=25-5\sqrt{2}-8=$
$=17-5\sqrt{2}$

Приклад 5. Знайти $\left|3\overline{a}+4\overline{b}\right|$, якщо $\left|\overline{a}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=2$, $\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}=120^\circ$.

Розв'язання. Скористуємося формулою (10) $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^2}$.

$$\left|3\bar{a}+4\bar{b}\right|=\sqrt{\left(3\bar{a}+4\bar{b}\right)^2}=\sqrt{9\bar{a}^2+24\bar{a}\bar{b}+16\bar{b}^2}=\sqrt{9\left|\bar{a}\right|^2+24\bar{a}\bar{b}+16\left|\bar{b}\right|^2}=$$
$$=\sqrt{9\cdot 1+24\cdot 1\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+16\cdot 4}=7$$

Приклад 6. Перевірити, чи будуть діагоналі AC і BD чотирикутника $A\left(2;-3;1\right)$, $B\left(1;4;0\right)$, $C\left(-4;1;1\right)$, $D\left(-5;-5;3\right)$ взаємно перпендикулярними?

Розв'язання. Спочатку знайдемо вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

$\overline{AC}\left\{-4-2;1-\left(-3\right);1-1\right\}=\left\{-6;4;0\right\}$

$\overline{BD}\left\{-5-1;-5-4;3-0\right\}=\left\{-6;-9;3\right\}$

Умова перпендикулярності: $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=0$. Перевіряємо:

$\left(-6\right)\cdot\left(-6\right)+4\cdot\left(-9\right)+0\cdot 3=36-36=0$. Дійсно діагоналі взаємно перпендикулярні.

Приклад 7. Задані вершини трикутника $A\left(1;0;-1\right)$, $B\left(3;2;-7\right)$, $C\left(0;-4;5\right)$. Знайти кут при вершині B (тобто $\angle ABC$).

Розв'язання. Утворимо два вектора: $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$. $\overline{BA}\left\{-2;-2;6\right\}$, $\overline{BC}\left\{-3;-6;12\right\}$. Скористуємося формулою (12): $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}$. В нашому випадку $\cos\varphi=\dfrac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}$.

Знайдемо скалярний добуток векторів і їх модулі:

$\overline{BA}\cdot\overline{BC}=6+12+72=90$

$\left|\overline{BA}\right|=\sqrt{4+4+36}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{9+36+144}=\sqrt{189}=3\sqrt{21}$

Тоді $\cos\varphi=\dfrac{90}{2\sqrt{11}\cdot 3\sqrt{21}}$, $\varphi=\arccos\dfrac{15}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{21}}$.

Приклад 8. Дано точки $A\left(-1;1;0\right)$, $B\left(3;0;-2\right)$, $C\left(2;-1;1\right)$. Знайти $\left(\overline{AB}-2\overline{BC}\right)\cdot\left(\overline{BA}+\overline{CB}\right)$.

Розв'язання. Потрібно знайти скалярний добуток векторів $\left(\overline{AB}-2\overline{BC}\right)$ і $\left(\overline{BA}+\overline{CB}\right)$. Знайдемо вектори $\overline{AB}$, $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{CB}$.

$\overline{AB}\left\{4;-1;-2\right\}$, тоді $\overline{BA}\left\{-4;1;2\right\}$.

$\overline{BC}\left\{-1;-1;3\right\}$, тоді $\overline{CB}\left\{1;1;-3\right\}$.

$2\overline{BC}\left\{-2;-2;6\right\}$

$\left(\overline{AB}-2\overline{BC}\right)\left\{6;1;-8\right\}$

$\left(\overline{BA}+\overline{CB}\right)\left\{-3;2;-1\right\}$

Знайдемо скалярний добуток векторів: $\left(\overline{AB}-2\overline{BC}\right)\cdot\left(\overline{BA}+\overline{CB}\right)=-18+2+8=-8$.

Приклад 9. Задані два вектора: $\overline{a}=3\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k}$ і $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k}$. Знайти вектор $\overline{c}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до осі OZ і задовольняє умовам: $\overline{a}\cdot\overline{c}=9$, $\overline{b}\overline{c}=-4$.

Розв'язання. Нагадаємо, що коли вектор перпендикулярний до деякої осі, то проекція вектора на цю вісь дорівнює нуль, в нашому випадку $np_z\overline{c}=0$. Таким чином потрібно знайти вектор $\overline{c}\left\{c_x,c_y,0\right\}$. Тоді умова $\overline{a}\cdot\overline{c}=9$ буде мати вигляд: $3\cdot c_x-1\cdot c_y+5\cdot 0=9$ або $3c_x-c_y=9$. А умова $\overline{b}\overline{c}=-4$ так: $c_x+2c_y=-4$. Одержали систему двох рівнянь. Розв'яжемо її:

$$\begin{cases}3c_x-c_y=9\\ c_x+2c_y=-4\end{cases}\Rightarrow 7c_x=14 \qquad c_x=2$$

Тоді $c_y=3c_x-9=6-9=-3$.

Таким чином $\overline{c}=2\overline{i}-3\overline{j}$.

Приклад 10. Обчислити роботу сили $\overline{F}\left\{3;2;-1\right\}$ по переміщенню матеріальної точки із положення $M\left(0;2;-1\right)$ в положення $N\left(4;3;1\right)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що робота – це скалярний добуток вектора сили $\overline{F}$ на вектор переміщення $\overline{MN}$. Знайдемо вектор $\overline{MN}\left\{4;1;2\right\}$.

Тоді робота $A = \overline{F} \cdot \overline{MN} = 12 + 2 - 2 = 12$.

Приклад 11. Обчислити роботу рівнодіючої сил $\overline{F}_1\left\{5;1;-1\right\}$, $\overline{F}_2\left\{0;1;4\right\}$, $\overline{F}_3\left\{-3;0;2\right\}$ по переміщенню матеріальної точки із положення $P\left(-2;1;0\right)$ в положення $Q\left(6;-1;1\right)$.

Розв'язання. Рівнодіюча сил $\overline{F}$ дорівнює сумі цих сил, тобто $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$. $\overline{F}\left\{5+0-3;1+1+0;-1+4+2\right\} = \left\{2;2;5\right\}$. Знайдемо вектор $\overline{PQ}\left\{8;-2;1\right\}$. Знайдемо роботу $A = \overline{F} \cdot \overline{PQ} = 16 - 4 + 5 = 17$.

Питання для самоперевірки:

1. За якою формулою обчислюють скалярний добуток векторів, якщо дано:

   1) модулі цих векторів і кут між ними ?

   2) модуль одного з них і проекцію другого вектора на напрям першого?

   3) проекції векторів?

2. Що таке скалярний квадрат вектора і чому він дорівнює? Звідси чому дорівнює модуль вектора?

3. Чому дорівнюють: $\overline{i}^2$, $\overline{j}^2$, $\overline{k}^2$, $\overline{i} \cdot \overline{j}$, $\overline{j} \cdot \overline{k}$, $\overline{j} \cdot \overline{i}$?

4. В якому випадку $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|$?

5. Чому дорівнює косинус кута між векторами?

6. Як записується умова перпендикулярності векторів?

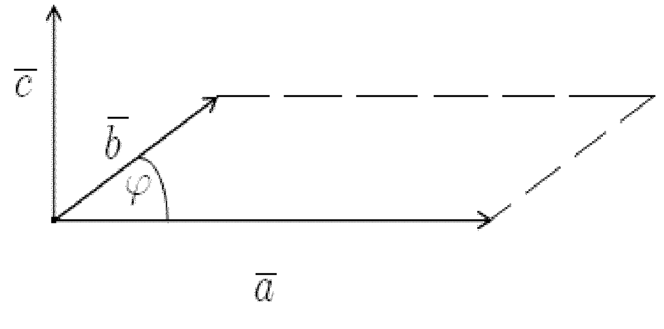
7. Як знайти проекцію вектора на напрям другого вектора?

8. Сформулюйте фізичний зміст скалярного добутку.

3. Векторний добуток векторів

Векторним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається <u>вектор</u> $\overline{c}$, який задовольняє такі умови:

1) вектор $\overline{c}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$



2) вектор $\overline{c}$ напрямлений у той бік, що коли дивитися з його кінця, то найкоротший оберт <u>від вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$</u> виконується проти годинникової стрілки (вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють праву трійку векторів)

3) <u>довжина</u> вектора $\overline{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, як на сторонах.

Позначення векторного добутку: $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ або $\overline{c} = \left[\overline{a}\overline{b}\right]$.

3.1 Властивості векторного добутку

Алгебраїчні властивості:

1. $\left[\overline{a}\overline{b}\right] = -\left[\overline{b}\overline{a}\right]$ – при заміні порядку множників векторний добуток змінює знак

2. $\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b} = \lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$

3. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c} = \overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$, або $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$

Геометричні властивості:

1. <u>Довжина</u> (модуль) вектора $\overline{c} = \overline{a}\times\overline{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, як на сторонах. (Нагадаємо, що площа паралелограма обчислюється за формулою: $S_{пар} = ab\sin\varphi$.) Тому

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\varphi \qquad (15)$$

2. Якщо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (вектори перпендикулярні), тобто $\sin\varphi = 1$, то $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|$.

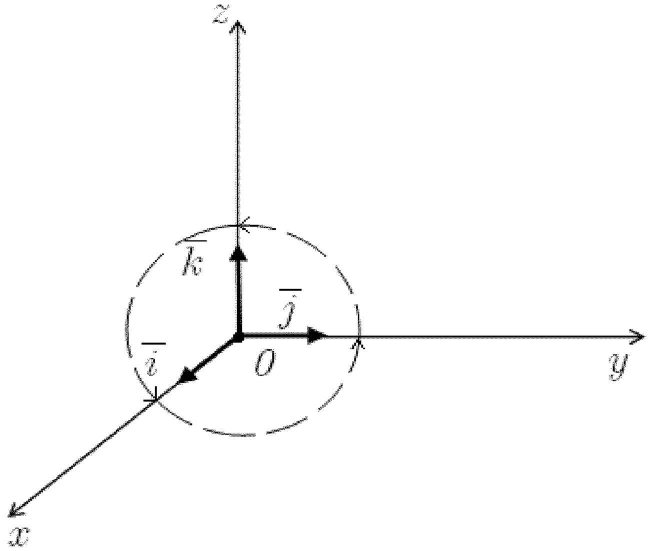
3. Якщо $\varphi = 0$, або $\varphi = \pi$, причому $\left|\overline{a}\right| \neq 0$, $\left|\overline{b}\right| \neq 0$, то $\overline{a}\times\overline{b} = 0$. Векторний добуток дорівнює нульовому вектору.

Приклад. $\left|\overline{a}\right| = 4$, $\left|\overline{b}\right| = 5$, $\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b} = \dfrac{\pi}{6}$. Знайти модуль векторного добутку $\overline{a}\times\overline{b}$.

Розв'язання. За формулою (15) $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\varphi = 4\cdot5\cdot\dfrac{1}{2} = 10$.

3.2 Обчислення векторного добутку

Спочатку знайдемо векторні добутки базисних векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.



$\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=\overline{0}$ – див. геометричні властивості.

Тепер, за означенням векторного добутку: $\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}$, $\overline{j}\times\overline{k}=\overline{i}$, $\overline{k}\times\overline{i}=\overline{j}$

А на основі властивості $\left[\overline{a}\overline{b}\right]=-\left[\overline{b}\overline{a}\right]$ маємо: $\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k}$, $\overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i}$, $\overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j}$.

Дано два вектора: $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$ і $\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}$. Знайдемо векторний добуток цих векторів.

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\right)\times\left(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\right)=a_xb_x\left[\overline{i}\,\overline{i}\right]+a_xb_y\left[\overline{i}\,\overline{j}\right]+a_xb_z\left[\overline{i}\,\overline{k}\right]+$$
$$+a_yb_x\left[\overline{j}\,\overline{i}\right]+a_yb_y\left[\overline{j}\,\overline{j}\right]+a_yb_z\left[\overline{j}\,\overline{k}\right]+a_zb_x\left[\overline{k}\,\overline{i}\right]+a_zb_y\left[\overline{k}\,\overline{j}\right]+a_zb_z\left[\overline{k}\,\overline{k}\right]=$$

{підставимо одержані вище векторні добутки векторів $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ } =

$$a_xb_y\overline{k}-a_xb_z\overline{j}-a_yb_x\overline{k}+a_yb_z\overline{i}+a_zb_x\overline{j}-a_zb_y\overline{i}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\overline{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\overline{j}+$$
$$+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\overline{k}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\overline{k}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Найзручніша форма запису векторного добутку векторів – це визначник третього порядку.

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\qquad(16)$$

Приклад. Дано: $\overline{a}\left\{3;-1;2\right\}$, $\overline{b}\left\{2;3;-1\right\}$. Знайти векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

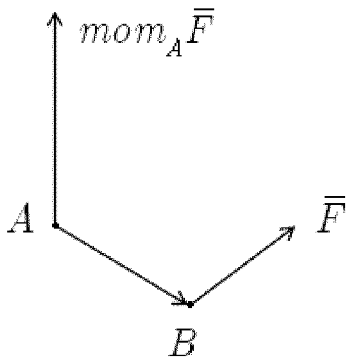
Розв’язання. За формулою (16):

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=\bar i\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\bar j\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\bar k\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)-3\cdot 2\right]\bar i-\left[3\cdot\left(-1\right)-2\cdot 2\right]\bar j+\left[3\cdot 3-2\cdot\left(-1\right)\right]\bar k=-5\bar i+7\bar j+11\bar k$$

3.3 Механічний зміст векторного добутку векторів

Нехай силу $\bar F$ прикладено у точці B. Моментом сили $\bar F$, прикладеної в точці B відносно довільної точки A, називається вектор, який дорівнює векторному добутку вектора $\overline{AB}$ на вектор сили $\bar F$.



Тобто $mom_A\bar F=\overline{AB}\times\bar F$ (17). Момент сили $\bar F$ відносно точки A позначають і так: $\bar M_A\left(\bar F\right)$.

Приклад. Сила $\bar F=3\bar j+2\bar k$ прикладена до точки $B\left(2;1;4\right)$. Знайти момент сили $\bar F$ відносно точки $A\left(3;0;-2\right)$.

Розв’язання. Знайдемо вектор $\overline{AB}\left\{-1;1;6\right\}$. Тепер знайдемо $mom_A\bar F$ за формулою (17).

$$mom_A\bar F=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ -1 & 1 & 6\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=-16\bar i+2\bar j-3\bar k$$

<u>Перелічимо основні формули цієї теми.</u>

<u>Векторний добуток</u> векторів $\bar a$ і $\bar b$ обчислюється за формулою:

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

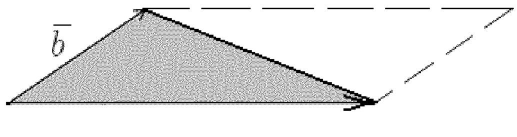
<u>Модуль векторного добутку</u> векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює:

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\varphi$$

З геометричної точки зору модуль векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах, як на сторонах.

$$S_{пар} = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$$

Помітимо, що $S_{\Delta} = \frac{1}{2}S_{пар} = \frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.



Момент сили $\overline{F}$, прикладеної до точки B відносно точки A обчислюється за формулою:

$$mom_A\overline{F} = \overline{AB}\times\overline{F}$$

Розв’язання прикладів.

Приклад 1. Дано $\left|\overline{c}\right| = 7$, $\left|\overline{d}\right| = 2$, $\overline{c}\,\hat{}\,\overline{d} = \frac{\pi}{4}$. Знайти $\left|\overline{c}\times\overline{d}\right|$.

Розв’язання. $\left|\overline{c}\times\overline{d}\right| = \left|\overline{c}\right|\cdot\left|\overline{d}\right|\sin\varphi = 7\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$

Приклад 2. Дано $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 5$, $\overline{a}\overline{b} = 6$. Обчислити $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

Розв’язання. Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$: $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi$. Модуль векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$: $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\varphi$.

Із першої формули: $\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|} = \frac{6}{2\cdot 5} = \frac{3}{5}$.

Знайдемо $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Тоді $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = 2\cdot 5\cdot\frac{4}{5} = 8$.

Приклад 3. Задані вектори $\overline{a}\left\{1;-2;1\right\}$ і $\overline{b}\left\{0;1;3\right\}$. Знайти $\overline{a}\times 2\overline{b}$.

Розв'язання. Знайдемо вектор $2\overline{b}\left\{0;2;6\right\}$. Знайдемо векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $2\overline{b}$ за формулою (16).

$$\overline{a}\times 2\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 6\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 6\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 6\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-14\overline{i}-6\overline{j}+2\overline{k}$$

Приклад 4. Задані вектори $\overline{a}\left\{-1;-2;2\right\}$, $\overline{b}=3\overline{i}+\overline{k}$. Знайти $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{b}$.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\overline{a}+\overline{b}\left\{2;-2;3\right\}$. Тоді векторний добуток буде дорівнювати:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2\overline{i}+7\overline{j}+6\overline{k}$$

Зауваження. Цей приклад можна було б розв'язати інакше:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{b}=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{b}\times\overline{b}=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{0}=\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2\overline{i}+7\overline{j}+6\overline{k}$$

Приклад 5. Дано: $\overline{m}\left\{3;1;-1\right\}$, $\overline{n}\left\{0;-2;4\right\}$. Знайти площу паралелограма, побудованого на цих векторах, як на сторонах.

Розв'язання. $S_{пар}=\left|\overline{m}\times\overline{n}\right|$. Спочатку знайдемо векторний добуток векторів $\overline{m}$ і $\overline{n}$, а потім модуль одержаного вектора.

$$\overline{m}\times\overline{n}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 4\end{vmatrix}=2\overline{i}-12\overline{j}-6\overline{k}$$

$$\left|\overline{m}\times\overline{n}\right|=\sqrt{4+144+36}=\sqrt{184}=2\sqrt{46}$$

Таким чином, $S_{пар}=2\sqrt{46}$.

Зауваження. Цей приклад можна розв'язати за допомогою формули: $\left|\overline{m}\times\overline{n}\right|=\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\sin\varphi$. Але розв'язання буде довшим.

Приклад 6. Задані вершини трикутника: $M\left(3;0;5\right)$, $N\left(3;2;2\right)$, $P\left(0;0;1\right)$. Знайти площу трикутника MNP.

Розв’язання. $S_{\Delta}=\frac{1}{2}S_{пар}=\frac{1}{2}\left|\overline{MN}\times\overline{MP}\right|$. Почнемо із знаходження векторів $\overline{MN}$ і $\overline{MP}$. Помітимо, що в цьому прикладі можна розглянути і інші вектори. Наприклад, $\overline{NP}$ і $\overline{NM}$.

$\overline{MN}\left\{0;2;-3\right\}$, $\overline{MP}\left\{-3;0;-4\right\}$

Тепер знайдемо векторний добуток цих векторів.

$$\overline{MN}\times\overline{MP}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & 2 & -3\\ -3 & 0 & -4\end{vmatrix}=-8\overline{i}+9\overline{j}+6\overline{k}$$

Нарешті, $S_{MNP}=\frac{1}{2}\left|\overline{MN}\times\overline{MP}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{64+81+36}=\frac{\sqrt{181}}{2}$

Приклад 7. Сила $\overline{F}\left\{3;1;-5\right\}$ прикладена до точки $M\left(0;-1;2\right)$. Знайти: 1) момент цієї сили відносно точки $N\left(1;-1;0\right)$; 2) величину (модуль) момента цієї сили; 3) напрямні косинуси момента цієї сили.

Розв’язання. 1) За формулою (17) $mom_{N}\overline{F}=\overline{NM}\times\overline{F}$. Знайдемо вектор $\overline{NM}\left\{-1;0;2\right\}$, тоді

$$mom_{N}\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -5\end{vmatrix}=-2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$$

2) Знайдемо величину (модуль) одержаного вектора: $\left|mom_{N}\overline{F}\right|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

3) Нагадаємо, що напрямні косинуси вектора $\overline{a}\left\{a_x,a_y,a_z\right\}$ обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}.$$

В нашому випадку: $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{6}}$.

Питання для самоперевірки:

1. Сформулюйте означення векторного добутку.

2. Чому чисельно дорівнює модуль векторного добутку?

3. В якому випадку векторний добуток двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює нульовому вектору (якщо $\left|\overline{a}\right| \neq 0$, $\left|\overline{b}\right| \neq 0$)?

4. За якою формулою обчислюється векторний добуток двох векторів?

5. Як використовується векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ для обчислення:

   1) площі паралелограма, побудованого на векторах, як на сторонах;

   2) площі трикутника, дві сторони якого збігаються з векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

   3) момента сили відносно точки.

4. Мішаний добуток трьох векторів

У попередніх темах були розглянуті добутки двох векторів: скалярній добуток векторів – це число; векторний добуток – це вектор.

Розглянемо три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ і різні випадки їх добутку:

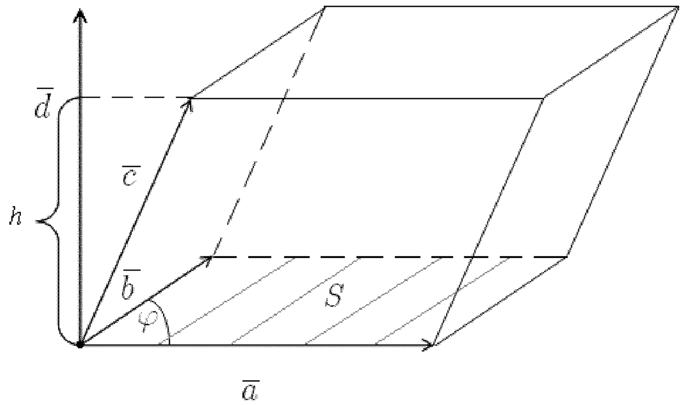
1) якщо помножити $\overline{a}$ на $\overline{b}$ скалярно (одержимо скаляр – число), а потім результат помножити на вектор $\overline{c}$, то дістанемо вектор, колінеарний вектору $\overline{c}$;
2) якщо $\overline{a}$ помножити на $\overline{b}$ векторно (одержимо вектор), а потім результат помножити скалярно на вектор $\overline{c}$, то одержимо скаляр, який будемо називати <u>векторно</u>-<u>скалярним</u> (<u>мішаним</u>) <u>добутком</u> <u>векторів</u>;
3) якщо $\overline{a}$ помножити на $\overline{b}$ векторно, а потім результат помножити векторно на вектор $\overline{c}$, то одержимо вектор, який будемо називати <u>подвійним</u> <u>векторним</u> <u>добутком</u>.

Розглянемо мішаний добуток векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$.

Якщо векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ помножити скалярно на вектор $\overline{c}$, то одержимо скаляр – мішаний добуток трьох векторів: $\left[\overline{a}\overline{b}\right] \cdot \overline{c}$. Можна довести, що $\left[\overline{a}\overline{b}\right] \cdot \overline{c} = \overline{a}\left[\overline{b}\overline{c}\right]$. Тому для позначення мішаного добутку застосовується більш простий символ: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$. Таким чином, $\left[\overline{a}\overline{b}\right] \cdot \overline{c} = \overline{a}\left[\overline{b}\overline{c}\right] = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

4.1 Геометричний зміст мішаного добутку

Розглянемо три некомпланарних, ненульових вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Нехай зведені до спільного початку, вони утворюють праву трійку. Позначимо векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ через вектор $\overline{d}$. Тобто $\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$.



Модуль вектора $\overline{d}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, як на сторонах. $\left|\overline{d}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi = S_{пар}$. Знайдемо скалярний добуток вектора $\overline{d}$ на вектор $\overline{c}$. Його можна записати таким чином: $\overline{d} \cdot \overline{c} = \left|\overline{d}\right| np_{\overline{d}}\overline{c}$.

Проекцію вектора $\overline{c}$ на напрям вектора $\overline{d}$ можна рахувати висотою паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, як на сторонах: $np_{\overline{d}}\overline{c} = h$.

Тобто $\overline{d} \cdot \overline{c} = \left|\overline{d}\right| np_{\overline{d}}\overline{c} = S_{пар} \cdot h = V_{пар}$.

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів, які утворюють праву трійку, дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах, як на сторонах.

Зауваження. Якщо три вектора утворюють ліву трійку, то знак мішаного добутку буде від'ємний. На практиці, зазвичай, не визначають, чи буде трійка векторів првою чи лівою. Тому, маючи на увазі <u>геометричний зміст</u> мішаного добутку, розглядають <u>модуль</u> мішаного добутку.

<u>Модуль</u> мішаного добутку векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, як на сторонах.

$$V_{пар} = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| \tag{18}$$

Іноді замість модуля пишуть «$\pm$». Тобто $V_{пар} = \pm\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Знак «$+$» вибирають, коли мішаний добуток додатній, і «$-$» – коли мішаний добуток від'ємний.

Цим результатом можна скористатися для обчислення об'єму трикутної піраміди, три ребра якої збігаються з трьома векторами, які мають спільний початок.

Відомо, що $V_{пір} = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot h$. А площа основи (площа трикутника) дорівнює $\dfrac{1}{2}$ площі паралелограма $S_{осн} = \dfrac{1}{2} S_{пар}$. Тоді $V_{пір} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot S_{пар} \cdot h = \dfrac{1}{6} S_{пар} \cdot h = \dfrac{1}{6} V_{паралелепіпед}$. (Об'єм піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеда.)

4.2 Обчислення мішаного добутку

Розглянемо три вектора: $\overline{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, $\overline{b}\left\{b_x, b_y, b_z\right\}$, $\overline{c}\left\{c_x, c_y, c_z\right\}$.

Векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ обчислимо за формулою:

$$\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overline{k}$$

Далі знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{c}$ і $\overline{d}$:

$\overline{c} \cdot \overline{d} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$ {помітимо, що права частина рівності є розкладанням визначника третього порядку за елементами третього рядка}

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Таким чином, $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ (19)

Нагадаємо, що при переставленні двох рядків (стовпців) визначника, його знак змінюється на протилежний. Якщо переставити всі рядки (стовпці) визначника, то його знак не зміниться. Звідси, можна записати таке твердження:

Кругове переставлення множників мішаного добутку його не змінює. А переставлення двох множників змінює його знак.

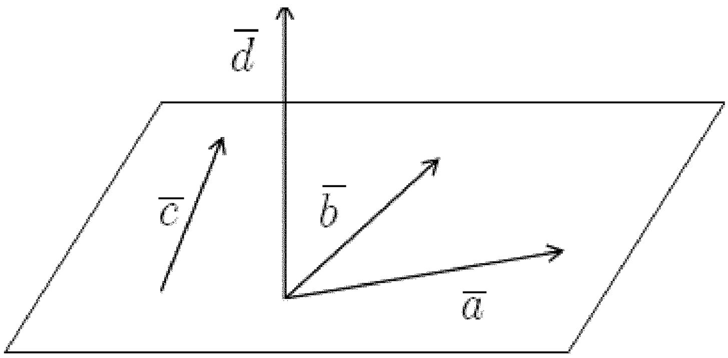
$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}$$

Приклад. Обчислити мішаний добуток векторів $\overline{a}\left\{1; -1; 2\right\}$, $\overline{b}\left\{3; -4; 1\right\}$, $\overline{c}\left\{2; 3; -1\right\}$.

Розв'язання. За формулою (19): $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 18 + 16 - 3 - 3 = 30$

4.3 Умова компланарності векторів

Якщо мішаний добуток векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ дорівнює нулю, то з геометричної точки зору об'єм паралелепіпеда дорівнює нулю. А це значить, що три вектора лежать в одній площині, тобто вони компланарні. Можна компланарність векторів зв'язати з рівністю мішаного добутку нулю і без застосування геометричного змісту. Дійсно: векторний добуток $\overline{d}$ векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (за означенням) буде перпендикулярним площині, де лежать вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Тоді скалярний добуток взаємно перпендикулярних векторів $\overline{d}$ і $\overline{c}$ буде дорівнювати нулю.



Але мішаний добуток дорівнює нулю ще і в двох наступних випадках (які можна звести до першого випадку – до компланарності векторів).

Дійсно: 1) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, коли хоча б один з векторів є нуль-вектор. Цей вектор може належати будь-якій площині, в тому числі і тій, де лежать два ненульових вектора;

2) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, коли два вектора – колінеарні. В цьому випадку ці вектори можна розмістити на одній прямій. І через цю пряму і третій вектор можна провести площину, тобто вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ будуть компланарні.

Таким чином, <u>необхідною</u> і <u>достатньою</u> умовою компланарності векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ є рівність нулю їх мішаного добутку:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (20)$$

Приклад. Перевірити, чи будуть компланарні вектори $\overline{a}\left\{2;3;-1\right\}$, $\overline{b}\left\{1;-1;3\right\}$, $\overline{c}\left\{1;9;-11\right\}$.

Розв'язання. Обчислимо мішаний добуток векторів.

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix}=22+9-9-1-54+33=0$$

Отже, за умовою (20) вектори компланарні.

Перелічимо основні формули цієї теми.

Мішаний добуток трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – скаляр – обчислюється за формулою:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

Геометричний зміст модуля мішаного добутку – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах, як на сторонах:

$$V_{пар}=\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$$

$$V_{піраміди}=\frac{1}{6}V_{паралелепіпед}$$

Необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – рівність нулю мішаного добутку цих векторів.

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0$$

Розв'язання прикладів.

Приклад 1. Дано: $A\left(0;1;-1\right)$, $B\left(-2;1;0\right)$, $C\left(3;5;4\right)$, $D\left(0;0;3\right)$. Знайти $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}$.

Розв'язання. Знайдемо вказані вектори: $\overline{AB}\left\{-2;0;1\right\}$, $\overline{AC}\left\{3;4;5\right\}$, $\overline{AD}\left\{0;-1;4\right\}$. За формулою (19) обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 4\end{vmatrix}=-32-3-10=-45$$

Приклад 2. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}=3\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}+5\overline{k}$, $\overline{c}=\overline{i}-j$.

Розв'язання. Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-5+4-2-15=-18$$

За означенням об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку векторів (формула (18)). Тобто: $V_{пар}=\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|=\left|-18\right|=18$

Приклад 3. При якому значенні α вектори $\overline{p}=\overline{j}-2\overline{k}$, $\overline{q}=3\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{c}=\alpha\overline{i}-3\overline{k}$ будуть компланарні?

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток векторів:

$$\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{c}=\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 1\\ \alpha & 0 & -3\end{vmatrix}=\alpha-2\alpha+9=-\alpha+9$$

Вектори будуть компланарними, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю: $-\alpha+9=0$. Звідси, $\alpha=9$

Приклад 4. Перевірити, чи будуть утворювати вектори $\overline{a}\{-1,0,3\}$, $\overline{b}\{4,-1,3\}$ і $\overline{c}\{5,-7,2\}$ базис в тривимірному просторі?

Розв'язання. Базис в тривимірному просторі складається з трьох некомпланарних векторів. Знайдемо мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b}$ і $\overline{c}$.

$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3\\ 4 & -1 & 3\\ 5 & -7 & 2\end{vmatrix}=2-84+15-21=88\neq 0\,.$$

Тобто ці вектори будуть утворювати базис.

Приклад 5. Довести, що точки $M\left(2;1;3\right)$, $N\left(0;1;5\right)$, $P\left(-1;2;1\right)$, $Q\left(1;2;-1\right)$ належать одній площині.

Розв'язання. Складемо три вектора. Наприклад, $\overline{MN}\left\{-2;0;2\right\}$, $\overline{MP}\left\{-3;1;-2\right\}$, $\overline{MQ}\left\{-1;1;-4\right\}$. Перевіримо, чи будуть вони компланарні.

$$\overline{MN}\cdot\overline{MP}\cdot\overline{MQ}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 2\\ -3 & 1 & -2\\ -1 & 1 & -4\end{vmatrix}=8-6+2-4=0$$

Дійсно, три вектора компланарні, тобто належать одній площині, а тому і дані точки будуть лежать в одній площині.

Приклад 6. Дано вершини піраміди: $A(0;2;1)$, $B(-1;2;3)$, $C(1;0;-1)$, $D(-1;3;0)$. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання. Спочатку утворимо три вектора. Нехай це будуть вектори: $\overline{AB}\{-1;0;2\}$, $\overline{AC}\{1;-2;-2\}$, $\overline{AD}\{-1;1;-1\}$. Об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V_{пір}=\frac{1}{6}V_{паралелепіпед}=\frac{1}{6}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & -2\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}[-2+2-4-2]=$$

$$=\pm\frac{1}{6}(-6)=1$$

Приклад 7. Об'єм піраміди дорівнює 5. Три її вершини знаходяться в точках: $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона належить осі OY.

Розв'язання. Якщо D належить осі OY, то її координати: $D(0;y;0)$. Утворимо три вектора: $\overline{AB}\{1;-1;2\}$, $\overline{AC}\{0;-2;4\}$, $\overline{AD}\{-2;y-1;1\}$. Тепер скористаємося формулою:

$$V_{пір}=\frac{1}{6}V_{паралелепіпед}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ -2 & y-1 & 1\end{vmatrix}=5$$

Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ -2 & y-1 & 1\end{vmatrix}=-2+8-8-4(y-1)=-2-4y+4=2-4y$$

Тоді $\pm\frac{1}{6}(2-4y)=5$ або $\pm\frac{1-2y}{3}=5$, або $\pm(1-2y)=15$.

Розв'яжемо два рівняння: $1-2y=15$ і $-1+2y=15$.

$1-2y=15\Rightarrow -2y=14\Rightarrow \underline{y=-7}$

$-1+2y=15\Rightarrow 2y=16\Rightarrow \underline{y=8}$

Тобто точок, які задовольняють умові приклада буде дві: $D_1(0;-7;0)$, $D_2(0;8;0)$

Питання для самоперевірки:

1. Що таке мішаний добуток трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$? (Як їх потрібно перемножити?) Як позначається мішаний добуток?

2. Сформулюйте геометричний зміст мішаного добутку.

3. За якою формулою обчислюється об’єм трикутної піраміди?

4. За якою формулою обчислюється мішаний добуток трьох векторів?

5. Як впливає переставлення векторів в мішаному добутку на його величину?

6. Сформулюйте умову компланарності трьох векторів.

Індивідуальні завдання

Варіант 1

Дано точки: $A(1;0;-1)$, $B(3;1;-4)$, $C(5;1;0)$, $D(-4;1;2)$.

Знайти:

1) $\overline{AC}$

2) $\left|\overline{AC}\right|$

3) $np_z\overline{AC}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{AC}$

5) $\overline{CA}\cdot\left(\overline{AB}-2\overline{CD}\right)$

6) $\overline{CA}\times\left(\overline{AB}-2\overline{CD}\right)$

7) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AC}$ і $\overline{AB}$

8) кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$

9) об’єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, як на сторонах

10) перевірити, чи будуть вектори $\overline{AC}$, $\overline{DB}$ і $\overline{BC}$ компланарними?

Варіант 2

Дано точки: $M(2;4;0)$, $N(-1;1;4)$, $P(0;0;2)$, $Q(3;4;-1)$.

Знайти:

1) $\overline{NP}$

2) $\left|\overline{NP}\right|$

3) $np_x\overline{NP}$

4) $\cos\beta$ вектора $\overline{NP}$

5) $\left(\frac{1}{2}\overline{MP}+\overline{PQ}\right)\cdot\overline{NQ}$

6) роботу сили $\overline{F}\left\{1;4;-5\right\}$ по переміщенню матеріальної точки із точки N в Q

7) $np_{\overline{MN}}\overline{PQ}$

8) $\overline{MP}\times\overline{QP}$

9) площу трикутника MPQ

10) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{PN}$, $\overline{PM}$ і $\overline{PQ}$

Варіант 3

Дано точки: $K\left(3;1;1\right)$, $L\left(-3;4;10\right)$, $M\left(1;3;7\right)$, $N\left(-4;0;1\right)$

Знайти:

1) $\overline{LM}$

2) $\left|\overline{LM}\right|$

3) $np_y\overline{LM}$

4) $\cos\gamma$ вектора $\overline{LM}$

5) $\left(\overline{LM}-\overline{MN}\right)\cdot\frac{1}{3}\overline{KL}$

6) кут між векторами $\overline{KL}$ і $\overline{MN}$

7) при яких значеннях α і β вектори $\overline{KM}$ і $\overline{a}=\alpha\overline{i}+5\overline{j}+\beta\overline{k}$ будуть колінеарними?

8) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{LM}$ і $\overline{LK}$

9) момент сили $\overline{F}=\overline{LM}$, прикладеної в точці L відносно точки N

10) об'єм піраміди з вершинами в точках K, L, M, N

Варіант 4

Дано точки: $C\left(1;4;8\right)$, $D\left(1;0;-5\right)$, $K\left(-3;1;0\right)$, $L\left(0;8;-1\right)$.

Знайти:

1) $\overline{KD}$

2) $\left|\overline{KD}\right|$

3) $np_z\overline{KD}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{KD}$

5) $\left(\overline{CD}-2\overline{DC}\right)\cdot\overline{KL}$

6) роботу сили $\overline{F}=\overline{DK}$ по переміщенню матеріальної точки із L в положення C

7) кут між векторами $\overline{CD}$ і $\overline{KD}$

8) площу трикутника CDK

9) об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{DC}$, $\overline{DK}$, $\overline{DL}$

10) при якому значенні m вектори $\overline{CD}$, $\overline{KC}$ і $\overline{d}=\overline{j}+m\overline{k}$ будуть компланарними?

Варіант 5

Дано точки: $M\left(2;-3;0\right)$, $P\left(-4;1;-1\right)$, $L\left(4;-3;2\right)$, $D\left(3;-3;2\right)$

Знайти:

1) $\overline{PL}$

2) $\left|\overline{PL}\right|$

3) $np_x\overline{PL}$

4) $\cos\beta$ вектора $\overline{PL}$

5) $\left(\overline{LP}-\overline{MD}\right)\cdot\overline{PD}$

6) кут між векторами $\overline{PD}$ і $\overline{MD}$

7) $np_{\overline{LD}}\left(\overline{MP}+\overline{PL}\right)$

8) $\left|\overline{MP}\times\overline{PL}\right|$

9) момент сили $\overline{F}=\overline{PD}$, прикладеної до точки P відносно точки M

10) об’єм піраміди з вершинами в точках M, P, L, D

Варіант 6

Дано точки: $A\left(3;0;-1\right)$, $B\left(4;5;3\right)$, $C\left(-3;2;0\right)$, $D\left(-8;7;1\right)$.

Знайти:

1) $\overline{AC}$

2) $\left|\overline{AC}\right|$

3) $np_y\overline{AC}$

4) $\cos\gamma$ вектора $\overline{AC}$

5) $\left(2\overline{AB}+\overline{AC}\right)\cdot\overline{CD}$

6) роботу сили $\overline{F}=\overline{AB}$ по переміщенню матеріальної точки із положення C в положення B

7) $\overline{BC}\times\overline{CD}$

8) площу трикутника ABC

9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{CD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CA}$

10) при якому значенні α точки A, B, C і $P\left(0;\alpha;1\right)$ будуть лежати в одній площині?

Варіант 7

Дано точки: $N\left(0;-1;3\right)$, $M\left(4;3;-5\right)$, $B\left(-4;0;5\right)$, $D\left(-7;1;-3\right)$.

Знайти:

1) $\overline{NB}$

2) $\left|\overline{NB}\right|$

3) $np_z\overline{NB}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{NB}$

5) $\left(\frac{1}{4}\overline{NM}+\overline{MD}\right)\cdot\overline{DB}$

6) кут між векторами $\overline{ND}$ і $\overline{NB}$

7) $\left|\overline{MB}\times\overline{DM}\right|$

8) при яких значеннях m і n вектори $\overline{NM}$ і $\overline{a}=3m\overline{i}+3\overline{j}+n\overline{k}$ будуть колінеарними?

9) напрямні косинуси момента сили $\overline{F}=\overline{BD}$, прикладеної до точки B відносно точки N

10) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{DB}$, $\overline{DM}$, $\overline{DN}$, як на сторонах

Варіант 8

Дано точки: $L(-5;0;0)$, $K(3;-2;1)$, $P(8;3;-1)$, $Q(4;1;0)$.

Знайти:

1) $\overline{KP}$

2) $\left|\overline{KP}\right|$

3) $np_x\overline{KP}$

4) $\cos\beta$ вектора $\overline{KP}$

5) $\left(\overline{QL}-2\overline{LK}\right)\cdot\overline{PQ}$

6) роботу сили $\overline{F}=\overline{LP}$ по переміщенню матеріальної точки із положення Q в положення P

7) $\left(\overline{QL}-2\overline{LK}\right)\times\overline{PQ}$

8) площу трикутника LKP

9) $\overline{QL}\cdot\overline{LK}\cdot\overline{PQ}$

10) при якому значенні m точки L, P, Q, $A(m;-1;0)$ будуть лежати в одній площині?

Варіант 9

Дано точки: $M(1;3;5)$, $N(0;-4;1)$, $B(0;3;2)$, $K(-5;3;0)$.

Знайти:

1) $\overline{NB}$

2) $\left|\overline{NB}\right|$

3) $np_y\overline{NB}$

4) $\cos\gamma$ вектора $\overline{NB}$

5) $\overline{MN}\cdot\left(\overline{NB}-\overline{BK}\right)$

6) кут між векторами $\overline{MB}$ і $\overline{BK}$

7) $\overline{MN}\times\overline{BK}$

8) величину момента сили $\overline{F}=\overline{BK}$, прикладеної до точки B відносно точки M

9) об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{BK}$, $\overline{BN}$, $\overline{BM}$, як на сторонах

10) перевірити, чи будуть вектори $\overline{MN}$, $\overline{NB}$ і $\overline{a} = 14\overline{j} + 2\overline{k}$ компланарні?

Варіант 10

Дано точки: $A(3;-3;1)$, $P(0;-4;2)$, $C(3;-1;-1)$, $D(0;0;2)$

Знайти:

1) $\overline{AP}$

2) $\left|\overline{AP}\right|$

3) $np_z\overline{AP}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{AP}$

5) $\left(\overline{AP} + \overline{PD}\right)\cdot\frac{1}{3}\overline{PC}$

6) роботу сили $\overline{F} = \overline{PA}$ по переміщенню матеріальної точки із положення D в положення C

7) $\overline{AC}\times\overline{CD}$

8) площу трикутника PCD

9) $\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{PD}$

10) об’єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{AP}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, як на сторонах

Варіант 11

Дано точки: $A(-1;3;0)$, $B(4;-5;0)$, $C(-5;1;8)$, $D(0;3;4)$.

Знайти:

1) $\overline{AC}$

2) $\left|\overline{AC}\right|$

3) $np_z\overline{AC}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{AC}$

5) $\overline{CA}\cdot\left(\overline{AB} - 2\overline{CD}\right)$

6) $\overline{CA}\times\left(\overline{AB} - 2\overline{CD}\right)$

7) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AC}$ і $\overline{AB}$

8) кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$

9) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, як на сторонах

10) перевірити, чи будуть вектори $\overline{AC}$, $\overline{DB}$ і $\overline{BC}$ компланарними?

Варіант 12

Дано точки: $M(-4;1;3)$, $N(0;2;5)$, $P(1;0;4)$, $Q(3;7;-1)$.

Знайти:

1) $\overline{NP}$

2) $\left|\overline{NP}\right|$

3) $np_x\overline{NP}$

4) $\cos\beta$ вектора $\overline{NP}$

5) $\left(\frac{1}{2}\overline{MP}+\overline{PQ}\right)\cdot\overline{NQ}$

6) роботу сили $\overline{F}\{1;4;-5\}$ по переміщенню матеріальної точки із точки N в Q

7) $np_{\overline{MN}}\overline{PQ}$

8) $\overline{MP}\times\overline{QP}$

9) площу трикутника MPQ

10) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{PN}$, $\overline{PM}$ і $\overline{PQ}$

Варіант 13

Дано точки: $K(-1;3;0)$, $L(2;-3;12)$, $M(0;2;8)$, $N(3;1;0)$

Знайти:

1) $\overline{LM}$

2) $\left|\overline{LM}\right|$

3) $np_y\overline{LM}$

4) $\cos\gamma$ вектора $\overline{LM}$

5) $\left(\overline{LM}-\overline{MN}\right)\cdot\frac{1}{3}\overline{KL}$

6) кут між векторами $\overline{KL}$ і $\overline{MN}$

7) при яких значеннях α і β вектори $\overline{KM}$ і $\overline{a}=\alpha\overline{i}+5\overline{j}+\beta\overline{k}$ будуть колінеарними?

8) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{LM}$ і $\overline{LK}$

9) момент сили $\overline{F}=\overline{LM}$, прикладеної в точці L відносно точки N

10) об'єм піраміди з вершинами в точках K, L, M, N

Варіант 14

Дано точки: $C\left(0;1;0\right)$, $D\left(3;-1;2\right)$, $K\left(5;-4;-1\right)$, $L\left(2;0;7\right)$.

Знайти:

1) $\overline{KD}$

2) $\left|\overline{KD}\right|$

3) $np_z\overline{KD}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{KD}$

5) $\left(\overline{CD}-2\overline{DC}\right)\cdot\overline{KL}$

6) роботу сили $\overline{F}=\overline{DK}$ по переміщенню матеріальної точки із L в положення C

7) кут між векторами $\overline{CD}$ і $\overline{KD}$

8) площу трикутника CDK

9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{DC}$, $\overline{DK}$, $\overline{DL}$

10) при якому значенні m вектори $\overline{CD}$, $\overline{KC}$ і $\overline{d}=\overline{j}+m\overline{k}$ будуть компланарні?

Варіант 15

Дано точки: $M\left(-1;0;2\right)$, $P\left(-3;5;8\right)$, $L\left(0;7;-5\right)$, $D\left(4;-3;1\right)$

Знайти:

1) $\overline{PL}$

2) $\left|\overline{PL}\right|$

3) $np_x\overline{PL}$

4) $\cos\beta$ вектора $\overline{PL}$

5) $\left(\overline{LP}-\overline{MD}\right)\cdot\overline{PD}$

6) кут між векторами $\overline{PD}$ і $\overline{MD}$

7) $np_{\overline{LD}}\left(\overline{MP}+\overline{PL}\right)$

8) $\left|\overline{MP}\times\overline{PL}\right|$

9) момент сили $\overline{F}=\overline{PD}$, прикладеної до точки P відносно точки M

10) об'єм піраміди з вершинами в точках M, P, L, D

Варіант 16

Дано точки: $A\left(2;1;0\right)$, $B\left(3;0;8\right)$, $C\left(4;-3;2\right)$, $D\left(3;-5;0\right)$.

Знайти:

1) $\overline{AC}$

2) $\left|\overline{AC}\right|$

3) $np_y\overline{AC}$

4) $\cos\gamma$ вектора $\overline{AC}$

5) $\left(2\overline{AB}+\overline{AC}\right)\cdot\overline{CD}$

6) роботу сили $\overline{F}=\overline{AB}$ по переміщенню матеріальної точки із положення C в положення B

7) $\overline{BC}\times\overline{CD}$

8) площу трикутника ABC

9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{CD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CA}$

10) при якому значенні α точки A, B, C і $P\left(0;\alpha;1\right)$ будуть лежати в одній площині?

Варіант 17

Дано точки: $N\left(-1;2;1\right)$, $M\left(7;14;1\right)$, $B\left(3;1;0\right)$, $D\left(5;-3;2\right)$.

Знайти:

1) $\overline{NB}$

2) $\left|\overline{NB}\right|$

3) $np_z\overline{NB}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{NB}$

5) $\left(\frac{1}{4}\overline{NM}+\overline{MD}\right)\cdot\overline{DB}$

6) кут між векторами $\overline{ND}$ і $\overline{NB}$

7) $\left|\overline{MB}\times\overline{DM}\right|$

8) при якому значенні m і n вектори $\overline{NM}$ і $\overline{a}=3m\overline{i}+3\overline{j}+n\overline{k}$ будуть колінеарними?

9) напрямні косинуси момента сили $\overline{F}=\overline{BD}$, прикладеної до точки B відносно точки N

10) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{DB}$, $\overline{DM}$, $\overline{DN}$, як на сторонах

Варіант 18

Дано точки: $L(0;-3;0)$, $K(2;-3;1)$, $P(7;-3;2)$, $Q(0;1;-4)$.

Знайти:

1) $\overline{KP}$

2) $\left|\overline{KP}\right|$

3) $np_x\overline{KP}$

4) $\cos\beta$ вектора $\overline{KP}$

5) $\left(\overline{QL}-2\overline{LK}\right)\cdot\overline{PQ}$

6) роботу сили $\overline{F}=\overline{LP}$ по переміщенню матеріальної точки із положення Q в положення P

7) $\left(\overline{QL}-2\overline{LK}\right)\times\overline{PQ}$

8) площу трикутника LKP

9) $\overline{QL}\cdot\overline{LK}\cdot\overline{PQ}$

10) при якому значенні m точки L, P, Q, $A(m;-1;0)$ будуть лежати в одній площині?

Варіант 19

Дано точки: $M\left(0;-3;4\right)$, $N\left(1;-1;1\right)$, $B\left(4;0;5\right)$, $K\left(3;-2;1\right)$.

Знайти:

1) $\overline{NB}$

2) $\left|\overline{NB}\right|$

3) $np_y\overline{NB}$

4) $\cos\gamma$ вектора $\overline{NB}$

5) $\overline{MN}\cdot\left(\overline{NB}-\overline{BK}\right)$

6) кут між векторами $\overline{MB}$ і $\overline{BK}$

7) $\overline{MN}\times\overline{BK}$

8) величину момента сили $\overline{F}=\overline{BK}$, прикладеної до точки B відносно точки M

9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{BK}$, $\overline{BN}$, $\overline{BM}$, як на сторонах

10) перевірити, чи будуть вектори $\overline{MN}$, $\overline{NB}$ і $\overline{a}=14\overline{j}+2\overline{k}$ компланарні?

Варіант 20

Дано точки: $A\left(2;-2;5\right)$, $P\left(1;-3;2\right)$, $C\left(7;-3;8\right)$, $D\left(1;0;1\right)$

Знайти:

1) $\overline{AP}$

2) $\left|\overline{AP}\right|$

3) $np_z\overline{AP}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{AP}$

5) $\left(\overline{AP}+\overline{PD}\right)\cdot\frac{1}{3}\overline{PC}$

6) роботу сили $\overline{F}=\overline{PA}$ по переміщенню матеріальної точки із положення D в положення C

7) $\overline{AC}\times\overline{CD}$

8) площу трикутника PCD

9) $\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{PD}$

10) об’єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{AP}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, як на сторонах

Варіант 21

Дано точки: $A(3;-1;5)$, $B(-2;0;4)$, $C(-7;3;0)$, $D(0;5;-1)$.

Знайти:

1) $\overline{AC}$

2) $\left|\overline{AC}\right|$

3) $np_z\overline{AC}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{AC}$

5) $\overline{CA}\cdot\left(\overline{AB}-2\overline{CD}\right)$

6) $\overline{CA}\times\left(\overline{AB}-2\overline{CD}\right)$

7) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{CD}$ і $\overline{CA}$

8) кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$

9) об’єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, як на сторонах

10) перевірити, чи будуть вектори $\overline{AC}$, $\overline{DB}$ і $\overline{BC}$ компланарними?

Варіант 22

Дано точки: $M(-3;1;2)$, $N(0;4;-1)$, $P(-11;1;4)$, $Q(2;-1;3)$.

Знайти:

1) $\overline{NP}$

2) $\left|\overline{NP}\right|$

3) $np_x\overline{NP}$

4) $\cos\beta$ вектора $\overline{NP}$

5) $\left(\frac{1}{2}\overline{MP}+\overline{PQ}\right)\cdot\overline{NQ}$

6) роботу сили $\overline{F}\left\{1;4;-5\right\}$ по переміщенню матеріальної точки із точки N в Q

7) $np_{\overline{MN}}\overline{PQ}$

8) $\overline{MP}\times\overline{QP}$

9) площу трикутника MPQ

10) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{PN}$, $\overline{PM}$ і $\overline{PQ}$

Варіант 23

Дано точки: $K\left(-2;1;-3\right)$, $L\left(-8;7;-3\right)$, $M\left(2;0;0\right)$, $N\left(-2;1;3\right)$

Знайти:

1) $\overline{LM}$

2) $\left|\overline{LM}\right|$

3) $np_y\overline{LM}$

4) $\cos\gamma$ вектора $\overline{LM}$

5) $\left(\overline{LM}-\overline{MN}\right)\cdot\frac{1}{3}\overline{KL}$

6) кут між векторами $\overline{KL}$ і $\overline{MN}$

7) при яких значеннях α і β вектори $\overline{KM}$ і $\overline{a}=\alpha\overline{i}+\beta\overline{j}+5\overline{k}$ будуть колінеарними?

8) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{LM}$ і $\overline{LK}$

9) момент сили $\overline{F}=\overline{LM}$, прикладеної в точці L відносно точки N

10) об'єм піраміди з вершинами в точках K, L, M, N

Варіант 24

Дано точки: $C\left(3;-4;0\right)$, $D\left(-1;1;3\right)$, $K\left(2;0;-1\right)$, $L\left(-3;3;1\right)$.

Знайти:

1) $\overline{KD}$

2) $\left|\overline{KD}\right|$

3) $np_z\overline{KD}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{KD}$

5) $\left(\overline{CD}-2\overline{DC}\right)\cdot\overline{KL}$

6) роботу сили $\overline{F}=\overline{DK}$ по переміщенню матеріальної точки із L в положення C

7) кут між векторами $\overline{CD}$ і $\overline{KD}$

8) площу трикутника CDK

9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{DC}$, $\overline{DK}$, $\overline{DL}$

10) при якому значенні m вектори $\overline{CD}$, $\overline{KC}$ і $\overline{d} = \overline{i} + m\overline{k}$ будуть компланарними?

Варіант 25

Дано точки: $M\left(-5;1;1\right)$, $P\left(0;3;4\right)$, $L\left(-7;-2;0\right)$, $D\left(0;-4;1\right)$

Знайти:

1) $\overline{PL}$

2) $\left|\overline{PL}\right|$

3) $np_{x}\overline{PL}$

4) $\cos\beta$ вектора $\overline{PL}$

5) $\left(\overline{LP} - \overline{MD}\right)\cdot\overline{PD}$

6) кут між векторами $\overline{PD}$ і $\overline{MD}$

7) $np_{\overline{LD}}\left(\overline{MP} + \overline{PL}\right)$

8) $\left|\overline{MP}\times\overline{PL}\right|$

9) момент сили $\overline{F} = \overline{PD}$, прикладеної до точки P відносно точки M

10) об'єм піраміди з вершинами в точках M, P, L, D

Варіант 26

Дано точки: $A\left(0;3;-1\right)$, $B\left(-3;4;2\right)$, $C\left(0;4;-1\right)$, $D\left(9;3;5\right)$.

Знайти:

1) $\overline{AC}$

2) $\left|\overline{AC}\right|$

3) $np_{y}\overline{AC}$

4) $\cos\gamma$ вектора $\overline{AC}$

5) $\left(2\overline{AB} + \overline{AC}\right)\cdot\overline{CD}$

6) роботу сили $\overline{F} = \overline{AB}$ по переміщенню матеріальної точки із положення C в положення B

7) $\overline{BC} \times \overline{CD}$

8) площу трикутника ABC

9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{CD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CA}$

10) при якому значенні α точки A, B, C і $P\left(0;\alpha;1\right)$ будуть лежати в одній площині?

Варіант 27

Дано точки: $N\left(2;1;5\right)$, $M\left(2;13;9\right)$, $B\left(-3;1;-1\right)$, $D\left(0;4;3\right)$.

Знайти:

1) $\overline{NB}$

2) $\left|\overline{NB}\right|$

3) $np_z\overline{NB}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{NB}$

5) $\left(\frac{1}{4}\overline{NM} + \overline{MD}\right) \cdot \overline{DB}$

6) кут між векторами $\overline{ND}$ і $\overline{NB}$

7) $\left|\overline{MB} \times \overline{DM}\right|$

8) при якому значенні m і n вектори $\overline{NM}$ і $\overline{a} = m\overline{i} + 3\overline{j} + n\overline{k}$ будуть колінеарними?

9) напрямні косинуси момента сили $\overline{F} = \overline{BD}$, прикладеної до точки B відносно точки N

10) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{DB}$, $\overline{DM}$, $\overline{DN}$, як на сторонах

Варіант 28

Дано точки: $L\left(3;-5;1\right)$, $K\left(0;3;-2\right)$, $P\left(0;2;1\right)$, $Q\left(-7;3;1\right)$.

Знайти:

1) $\overline{KP}$

2) $\left|\overline{KP}\right|$

3) $np_x\overline{KP}$

4) $\cos\beta$ вектора $\overline{KP}$

5) $\left(\overline{QL}-2\overline{LK}\right)\cdot\overline{PQ}$

6) роботу сили $\overline{F}=\overline{LP}$ по переміщенню матеріальної точки із положення Q в положення P

7) $\left(\overline{QL}-2\overline{LK}\right)\times\overline{PQ}$

8) площу трикутника LKP

9) $\overline{QL}\cdot\overline{LK}\cdot\overline{PQ}$

10) при якому значенні m точки L, P, Q, $A\left(m;-1;0\right)$ будуть лежати в одній площині?

Варіант 29

Дано точки: $M\left(3;-1;5\right)$, $N\left(1;-2;4\right)$, $B\left(-2;0;-1\right)$, $K\left(-4;-3;2\right)$.

Знайти:

1) $\overline{NB}$

2) $\left|\overline{NB}\right|$

3) $np_y\overline{NB}$

4) $\cos\gamma$ вектора $\overline{NB}$

5) $\overline{MN}\cdot\left(\overline{NB}-\overline{BK}\right)$

6) кут між векторами $\overline{MB}$ і $\overline{BK}$

7) $\overline{MN}\times\overline{BK}$

8) величину момента сили $\overline{F}=\overline{BK}$, прикладеної до точки B відносно точки M

9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{BK}$, $\overline{BN}$, $\overline{BM}$, як на сторонах

10) перевірити, чи будуть вектори $\overline{MN}$, $\overline{NB}$ і $\overline{a}=14\overline{i}+2\overline{k}$ компланарні?

Варіант 30

Дано точки: $A\left(0;-4;1\right)$, $P\left(2;-1;3\right)$, $C\left(8;-4;15\right)$, $D\left(1;0;-2\right)$

Знайти:

1) $\overline{AP}$

2) $\left|\overline{AP}\right|$

3) $np_z\overline{AP}$

4) $\cos\alpha$ вектора $\overline{AP}$

5) $\left(\overline{AP}+\overline{PD}\right)\cdot\frac{1}{3}\overline{PC}$

6) роботу сили $\bar{F}=\overline{PA}$ по переміщенню матеріальної точки із положення D в положення C

7) $\overline{AC}\times\overline{CD}$

8) площу трикутника PCD

9) $\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{PD}$

10) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{AP}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, як на сторонах

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Овчинников П.П, Яремчук Ф.П., Міхайленко В. М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. - К.: Техніка. – 2000. - 592 с.
2. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1966. - 272 с.
3. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М: Высш. шк., 1981. – Ч.1

ЗМІСТ