МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Кафедра «Вища математика»

До друку

Перший проректор ________ Б. Є. БОДНАР

"___" ________2010

Модульне навчання

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Методичні вказівки для виконання модульної роботи № 7

Укладачі: Ю. Р. Бредіхін
С. П. Русу

Для студентів II курсу усіх спеціальностей денної форми навчання

Дніпропетровськ 2010

УДК 512

Укладачі:
Бредіхін Юрій Радіонович
Русу Сергій Павлович

Рецензенти:
канд. фіз.-мат. наук, доц. *Ф. І. Аврахов* (ДНУ)
канд. фіз.-мат. наук, доц. *З. М. Гасанов* (ДІІТ)

Диференціальні рівняння [Текст]: методичні вказівки для виконання модульної роботи № 7 / уклад.: Ю. Р. Бредіхін, С. П. Русу; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2010. – 58 с.

Методичні вказівки призначаються для студентів усіх спеціальностей денної форми навчання, можуть бути використані слухачами безвідривної форми навчання. Вони складаються з двох частин: перша частина – теоретичні основи звичайних диференціальних рівнянь першого і другого порядку, приклади розв'язування типових диференціальних рівнянь та завдання для самостійної роботи. У другій частині наведені теоретичні питання та зразки диференціальних рівнянь модуля «Диференціальні рівняння».

Бібліогр.: 8 назв.

Вступ

Для дослідження різноманітних процесів та явищ, що містять елементи руху, часто користуються рівняннями, які, крім незалежних величин і залежних від них функцій, також мають похідні від цих функцій. Такі рівняння називають *диференціальними*.

Звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$.

Диференціальне рівняння *у частинних похідних* — рівняння, у якому невідома функція є функцією багатьох змінних.

Порядок диференціального рівняння визначається порядком найбільшої похідної, яка є в цьому рівнянні.

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Диференціальне рівняння має загальний та частинний розв'язки.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.1) є функція

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{1.2}$$

яка це рівняння перетворює у тотожність і має довільні сталі $C_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, число яких дорівнює порядку рівняння.

Частинним розв'язком рівняння (1.1) називають функцію $y = f\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right)$, яка утворюється із загального розв'язку (1.2) за певних значень сталих $C_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

ЧАСТИНА ПЕРША

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.3}$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно y', то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y). \tag{1.4}$$

Функція $y = \varphi(x, C_1)$, де C_1 — довільна стала є загальним розв'язком рівняння (1.3), якщо вона обертає його в тотожність за будь-якого значення сталої C_1.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння (1.3) знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\varphi(x, y, C_1) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* рівняння.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою*. Таким чином, загальному розв'язку відповідає множина інтегральних кривих. Для знаходження частинного розв'язку із загального потрібно зафіксувати довільну сталу $C_1 = C_1^0$ і таким чином обрати інтегральну криву, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$. Умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \tag{1.5}$$

називають *початковою умовою* розв'язку.

Задача знаходження частинного розв'язку рівняння (1.4), який задовольняє початкову умову (1.5), називається задачею Коші. Частинному розв'язку рівняння (1.3) відповідає єдина інтегральна крива, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Не всі диференціальні рівняння першого порядку можливо розв'язати, тобто знайти функцію $y = \varphi(x, C_1)$.

Розглянемо типи диференціальних рівнянь першого порядку, які можна інтегрувати, тобто знайти їх розв'язки.

Завдання та запитання для самоконтролю

1. Що таке диференціальне рівняння?

2. Що визначає порядок диференціального рівняння?

3. Визначити порядок диференціальних рівнянь: $y''' = f(x)$; $xy' + x^2 = y^3$; $y'' + 4y' + y = 0$.

4. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?

5. Що називається частинним розв'язком диференціального рівняння?

6. Визначити диференціальне рівняння першого порядку: $y''' = f(x)$; $xy' + x^2 = y^3$; $y'' + 4y' + y = 0$.

7. У чому полягає геометричний зміст загального розв'язку диференціального рівняння першого порядку?

8. Який геометричний зміст частинного розв'язку диференціального рівняння?

9. Який зміст задачі Коші?

§ 1.1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння вигляду

$$y' = f(x) \cdot \varphi(y), \tag{1.6}$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ — задані неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Права частина рівняння (1.6) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати це рівняння, треба відокремити змінні. Для цього замінимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і, вважаючи, що $\varphi(y) \neq 0$, одержимо:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \Rightarrow dy = f(x)\varphi(y)dx \Rightarrow \frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx.$$

Рівняння, в якому множник при dx є функцією тільки змінної x, а множник при dy є функцією, яка залежить тільки від y, тобто вигляду

$$P(y)dy = Q(x)dx, \tag{1.7}$$

називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними*. Для розв'язання рівняння (1.7) його інтегрують відповідно по змінних x і y, тобто

$$\int P(y)dy = \int Q(x)dx + C. \tag{1.8}$$

Тому для рівняння (1.6) маємо $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$.

Вираз (1.8) є загальним інтегралом рівняння (1.7). Якщо його можна записати у вигляді $y = F(x, C)$, то дістанемо загальний розв'язок.

Диференціальне рівняння вигляду $f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$ теж називають рівнянням з відокремлюваними змінними.. Для відокремлювання змінних, тобто для перетворення його до вигляду (1.7), досить обидві його частини поділити на добуток $\varphi_1(y)f_2(x)$ і записати у вигляді

$$\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx.$$

Звідси

$$\int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + C .$$

Розв’язування типових диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

Треба під час розв’язування диференціальних рівнянь пам’ятати, що похідна $y'(x)$ є відношенням диференціалів, тобто $y' = \frac{dy}{dx}$.

Завдання та запитання для самоконтролю

1. Який вигляд має диференціальне рівняння з відокремленими змінними?
2. Що таке диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними?
3. Як розв’язують диференціальне рівняння з відокремленими змінними?
4. Як розв’язують рівняння $y' = f(x) \cdot g(y)$?

Розв’язування типових прикладів

Приклад 1.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = 2x$.

Розв'язування. Визначаємо, що задане диференціальне рівняння першого порядку (маємо тільки похідну першого порядку) з відокремлюваними змінними (1.6) можливо перетворити до вигляду (1.7). Враховуючи, що $y' = \frac{dy}{dx}$, робимо тотожні перетворення:

$$\frac{dy}{dx} = 2x ;\ dy = 2xdx ;\ \int dy = \int 2xdx ;\ y = x^2 + C .$$

Приклад 1.2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xdy = ydx$, який задовольняє початкову умову $y(1) = 2$.

Розв'язування. Якщо порівняти задане рівняння з диференціальним рівнянням із відокремлюваними змінними (1.7), визначаємо, що біля диференціала dy знаходиться змінна x, а біля диференціала dx змінна y. Згідно з виразом (1.7) повинно бути навпаки, тобто змінна y повинна бути біля dy, а змінна x біля dx. Тому робимо тотожні перетворення (задану рівність поділимо на добуток xy):

$$\frac{xdy}{xy} = \frac{ydx}{xy};\ \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};\ \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x};\ \ln|y| = \ln|x| + \ln C;\ \ln|y| = \ln|Cx|;\ y = Cx .$$

Зауваження. Зразу після інтегрування треба записувати довільну сталу C. Якщо після інтегрування отримали логарифми, доцільно замість сталої C записувати $\ln C$.

Таким чином, загальний розв'язок $y = Cx$. Для отримання частинного розв'язку спочатку знаходимо значення сталої C із заданої початкової умови: при $x = 1$ змінна $y = 2$. Маємо $2 = C \cdot 1$; звідки $C = 2$. Підставляємо значення C у загальний розв'язок і отримаємо частинний розв'язок $y = 2x$.

Приклад 1.3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' = \left(y^2 + 1\right)\cos 2x.$$

Розв'язування. Визначаємо, що це диференціальне рівняння першого порядку (бо є тільки похідна y') з відокремлюваними змінними (права частина – добуток двох функцій $y^2 + 1$ і $\cos 2x$, тобто має вигляд (1.6)). Тому замінюємо похідну $y' = \dfrac{dy}{dx}$, відокремлюємо змінні і інтегруємо отриману рівність:

$$\frac{dy}{dx} = \left(y^2 + 1\right)\cos 2x;\ dy = \left(y^2 + 1\right)\cos 2x dx;$$

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = \cos 2x dx;\ \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int \cos 2x dx;$$

$\operatorname{arctg} y = \dfrac{1}{2}\sin x + C$ – це загальний інтеграл рівняння.

Звідси $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\sin x + C\right)$ – загальний розв'язок.

Приклад 1.4. Знайти частинний розв'язок рівняння $2xydx + \left(x^2 + 1\right)dy = 0$, який задовольняє початкову умову $y\left(x = 1\right) = 2$.

Розв'язування. Задане диференціальне рівняння першого порядку (маємо диференціали dx і dy) з відокремлюваними змінними (перед диференціалами добуток функцій, кожна з яких залежить тільки від зміни x або y). Перетворюємо це рівняння до вигляду (1.7). Дістаємо:

$$\left(x^2 + 1\right)dy = -2xydx;\ \frac{\left(x^2 + 1\right)dy}{\left(x^2 + 1\right)y} = \frac{-2xydx}{\left(x^2 + 1\right)y};\ \frac{dy}{y} = -\frac{2xdx}{x^2 + 1}.$$

Інтегруємо отриманий вираз:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2x}{x^2 + 1}dx;\ \ln|y| = -\ln\left|x^2 + 1\right| + \ln C;$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x^2+1}\right| \Rightarrow y = \frac{C}{x^2+1}$$ – загальний розв'язок.

Для знаходження частинного розв'язку використовуємо задану початкову умову, тобто у загальний розв'язок підставляємо значення $x = 1$, $y = 2$ і визначаємо значення сталої C. Маємо $2 = \frac{C}{1+1}$; $C = 4$.

Підставляємо значення C у загальний розв'язок і дістаємо частинний розв'язок $y = \frac{4}{x^2+1}$.

Приклад 1.5. Знайти частинний розв'язок рівняння $\operatorname{tg} y dx = x \ln x dy$, який задовольняє умову $y(e) = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язування. Задане рівняння доводимо до вигляду (1.7).

$$\operatorname{tg} y dx = x \ln x dy;\ \frac{dx}{x\ln x} = \frac{dy}{\operatorname{tg} y};\ \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\cos y dy}{\sin y};\ \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \int \frac{d\sin y}{\sin y};$$

$$\ln|\ln x| = \ln|\sin y| + \ln C;\ \ln|\ln x| = \ln|C\sin y|;$$

$$\ln x = C\sin y$$ – загальний інтеграл рівняння.

Знаходимо змінну y: $\sin y = \frac{\ln x}{C}$, $y = \arcsin\frac{\ln x}{C}$ – загальний розв'язок.

Знаходимо значення довільної сталої C із початкової умови:

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin\frac{\ln e}{C};\ \frac{\pi}{2} = \arcsin\frac{1}{C};\ \frac{1}{C} = \sin\frac{\pi}{2};\ \frac{1}{C} = 1;\ C = 1.$$

Підставляємо значення $C = 1$ у загальний розв'язок і отримаємо частинний розв'язок рівняння: $y = \arcsin(\ln x)$.

Завдання для аудиторної роботи

Знайти загальний розв'язок, а де задана початкова умова, частинний розв'язок диференціального рівняння:

1) $y' = y + 1$;

2) $ydy = xdx$;

3) $y'\cos^2 x = \frac{y}{\ln y}$, $y(0) = 1$;

4) $xy' = y^2$;

5) $xdy = dx - dy$, $y(0) = 0$;

6) $x^2dy - y^2dx = 0$, $y(1) = 1$.

Домашнє завдання

1. $y' = \dfrac{\cos x}{y}$; $\boxed{y^2 = 2\sin x + C}$.

2. $xy' = 2y$, $y(1) = 2$; $\boxed{y = 2x^2}$.

3. $xyy' = 1 - x^2$; $\boxed{x^2 + y^2 = \ln\left|Cx^2\right|}$.

4. $(x + 2xy)y' - 2 = 0$; $\boxed{y + y^2 = \ln\left|Cx^2\right|}$.

5. $xdy - y^2dx = 0$; $\boxed{y = \dfrac{1}{\ln\frac{C}{x}}}$.

6. $(y+1)dx - dy = 0$; $\boxed{y = Ce^x - 1}$.

7. $y'x - y\ln y = 0$; $\boxed{y = e^{Cx}}$.

§ 1.2. Однорідні диференціальні рівняння

Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією n-го виміру*, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Приклад. $f(x, y) = x^2 - 5xy$ - однорідна функція другого виміру, оскільки $f(tx, ty) = t^2\left(x^2 - 5xy\right) = t^2 f(x, y)$.

Функція $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{\sqrt{xy}}$ – однорідна функція нульового виміру, оскільки $f(tx, ty) = \dfrac{t(2x - y)}{t\sqrt{xy}} = t^0 f(x, y)$.

Рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{1.9}$$

називається *однорідним диференціальним рівнянням першого порядку*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Рівняння вигляду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ буде однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ будуть однорідними функціями одного й того ж самого виміру. Однорідні рівняння завжди можливо записати у вигляді $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто похідну y' виразити як функцію відношення змінних $\frac{y}{x}$.

Однорідні рівняння розв'язують шляхом заміни змінної

$$\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow y = xu(x), \tag{1.10}$$

де $u(x)$ — невідома функція.

Далі знаходять значення

$$y'(x) = u + x\frac{du}{dx} \tag{1.11}$$

і вирази (1.10) і (1.11) підставляють у рівняння (1.9):

$$u + x\frac{du}{dx} = f(x, xu).$$

За умовою $f(x, y)$ — однорідна функція нульового виміру, тому, враховуючи, що $\frac{y}{x} = u$, одержуємо:

$$u + x\frac{du}{dx} = x^0 f(1, u) = f(1, u). \tag{1.12}$$

Здобули рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо $f(1, u) - u \neq 0$, то $\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$.

Підставимо після інтегрування значення $u = \frac{y}{x}$ і дістанемо інтеграл рівняння (1.9). Якщо $f(1, u) - u = 0$, то рівність (1.12) залишається у вигляді $x\frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow du = 0, \quad y = Cx$.

Розглянемо рівняння, яке можна звести до однорідного. Нехай маємо рівняння вигляду

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \tag{1.13}$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – задані сталі.

Якщо $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, то можливо зробити таку заміну змінних:

$$x = u + \alpha, \; y = v + \beta, \tag{1.14}$$

що в лінійних функціях зникнуть вільні члени c_1 і c_2, тобто виконуватимуться рівності $a_1x+b_1y+c_1=a_1u+b_1v$, $a_2x+b_2y+c_2=a_2u+b_2v$.

Дійсно, підставляючи (1.14) у вираз (1.13) і враховуючи, що $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(v+\beta)}{d(u+\alpha)}=\frac{dv}{du}$, отримуємо:

$$\frac{dv}{du}=\frac{a_1u+a_1\alpha+b_1v+b_1\beta+c_1}{a_2u+a_2\alpha+b_2v+b_2\beta+c_2}. \tag{1.15}$$

Значення α і β знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0;\\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0\end{cases}.$$

Рівняння (1.15) набуває вигляду

$$\frac{dv}{du}=\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}.$$

Це однорідне рівняння, тому що

$$\frac{dv}{du}=\frac{u\left(a_1+b_1\frac{v}{u}\right)}{v\left(a_2+b_2\frac{v}{u}\right)}=\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}.$$

Завдання та запитання для самоконтролю

1. Що таке однорідна функція n-го виміру?

2. Визначити вимір наступних однорідних функцій: $f(x,y)=\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}$; $f(x,y)=\frac{2x-y}{x+y}$; $f(x,y)=x^3-y^3$; $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

3. Яку заміну застосовують для розв’язування однорідних диференціальних рівнянь першого порядку?

4. Коли диференціальне рівняння є однорідним?

Розв'язування типових рівнянь

Приклад 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$.

Розв'язування. У заданому рівнянні похідна y' є функцією відношення $\frac{y}{x}$, тобто маємо однорідне диференціальне рівняння. Тому згідно з формулами (1.10) і (1.11) робимо заміну: $\frac{y}{x} = u$, $y' = u'x + u$.

Підставляючи ці значення у задане рівняння, дістаємо:

$$u'x + u = u + u^2;\ \frac{du}{dx}x = u^2;\ xdu = u^2 dx;\ \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x};\ \int u^{-2}du = \int \frac{dx}{x};$$

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C = \ln|Cx|;\ u = -\frac{1}{\ln|Cx|};\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{\ln|Cx|};\ y = -\frac{x}{\ln|Cx|}.$$

Приклад 2.2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$, який задовольняє початкову умову $y(1) = 0$.

Розв'язування. Якщо рівняння записати у вигляді $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\frac{y}{x}}$, то визначаємо, що маємо однорідне диференціальне рівняння.

Тому робимо заміну: $\frac{y}{x} = u$; $y' = u'x + u$.

Отримуємо:

$$u'x + u = u + \frac{1}{u};\ x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u};\ \int udu = \int \frac{dx}{x};\ \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln C = \ln|Cx|;$$

$$u^2 = 2\ln|Cx|;\ u = \pm\sqrt{2\ln|Cx|};\ \frac{y}{x} = \pm\sqrt{2\ln|Cx|};\ y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}.$$

Дістали загальний розв'язок. Значення довільної сталої C визначаємо із початкової умови: $0 = \pm\sqrt{2\ln C}$; $\ln C = 0$; $C = 1$.

Частинний розв'язок приймає вигляд $y = \pm x\sqrt{\ln 2x}$.

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння $y' - \frac{y}{x} = \cos^2\frac{y}{x}$.

Розв'язування. Визначаємо, що задане рівняння має похідну y', яка є функцією відношення $\frac{y}{x}$, тобто однорідне диференціальне рівняння першого порядку, яке, як відомо, розв'язується за допомогою заміни:

$$\frac{y}{x}=t;\ y=tx;\ y'=t'x+t.$$

Підставляємо це значення у рівняння:

$$t'x+t-t=\cos^2 t;\ t'x=\cos^2 t.$$

Враховуючи, що $t'=\dfrac{dt}{dx}$, отримуємо:

$$x\frac{dt}{dx}=\cos^2 t;\ \frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{dx}{x};\ \int\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{dx}{x};\ \operatorname{tg}t=\ln|x|+\ln C;$$

$$\operatorname{tg}t=\ln|Cx|;\ t=\operatorname{arctg}\ln|Cx|.$$

Повертаємось до змінної y: $\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\ln|Cx|$; $y=x\operatorname{arctg}\ln|Cx|$ – загальний розв'язок рівняння.

Приклад 2.4. Розв'язати рівняння $\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0$.

Розв'язування. Визначаємо, що біля диференціалів знаходяться однорідні функції другого порядку, тому що

$$P(x,y)=x^2+2xy;\ P(tx,ty)=t^2x^2+2tx\cdot ty=t^2\left(x^2+2xy\right)=t^2P(x,y);$$

$$Q(x,y)=xy;\ Q(tx,ty)=tx\cdot ty=t^2xy=t^2Q(x,y).$$

Отже, задане рівняння є однорідним і тому робимо підстановку

$$y=ux,\ dy=xdu+udx.$$

Тоді

$$\left(x^2+2x^2u\right)dx+xux(xdu+udx)=0;\ \left(x^2+2x^2u+u^2x^2\right)dx+ux^3du=0;$$

$$x^2\left(1+2u+u^2\right)dx+ux^3du=0;\ x^2\left[\left(1+2u+u^2\right)dx+uxdu\right]=0;$$

$$\left(1+2u+u^2\right)dx+uxdu=0.$$

Відокремлюємо змінні і інтегруємо отриманий вираз

$$\frac{dx}{x}+\frac{udu}{(u+1)^2}=0;\ \int\frac{dx}{x}+\int\frac{(u+1)-1}{(u+1)^2}du=C,$$

$$\ln|x|+\int\frac{du}{u+1}-\int\frac{du}{(u+1)^2}=C;\ \ln|x|+\ln|u+1|+\frac{1}{u+1}=C.$$

Повертаємося до змінних y і x, вважаючи, що $u = \frac{y}{x}$:

$$\ln\left|x\left(\frac{y}{x}+1\right)\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = C;\ \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$$ – загальний інтеграл.

Приклад 2.5. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$xy' = y(1+\ln y - \ln x),$$

який задовольняє початкову умову $y(1) = 2$.

Розв'язування. Враховуючи властивості логарифма $\left(\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y\right)$, задане рівняння можна записати у вигляді

$$y' = \frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right).$$

Бачимо, що похідна є функцією відношення $\frac{y}{x}$, тобто маємо однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Робимо підстановку

$$\frac{y}{x} = t;\ y = tx;\ y' = t'x + t.$$

Отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними відносно t і x:

$$t'x + t = t(1+\ln t);\ x\frac{dt}{dx} = t\ln t;\ \frac{dt}{t\ln t} = \frac{dx}{x};\ \int\frac{d\ln t}{\ln t} = \int\frac{dx}{x} + C;$$

$$\ln|\ln|t|| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|;\ \ln|t| = Cx;\ t = e^{Cx};\ \frac{y}{x} = e^{Cx};$$

$y = xe^{Cx}$ - загальний розв'язок.

Знаходимо значення C із початкової умови ($y = 2$, коли $x = 1$)

$$2 = 1e^{C};\ \ln 2 = \ln e^{C};\ C = \ln 2.$$

Частинний розв'язок $y(x) = xe^{x\ln 2} = x\left(e^{\ln 2}\right)^{x} = x2^{x}$.

Завдання для аудиторної роботи

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння або частинний розв'язок, якщо задана початкова умова:

1. $y' = x\cos^2\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

2. $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{x}{y}}$.

3. $y' - \operatorname{tg}\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$.

4. $(y-x)dx + (x+y)dy = 0$, $y(1) = 1$.

5. $y' = \frac{y}{x+y}$.

Домашнє завдання

1. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$; $\boxed{y = -x\ln\left|\ln|Cx|\right|}$.

2. $(x+y)dx + xdy = 0$; $\boxed{x^2 + 2xy = C}$.

3. $\left(x - y\sin\frac{2y}{x}\right)dx + x\sin\frac{2y}{x}dy = 0$; $\boxed{\sin^2\frac{y}{x} = \ln|Cx|}$.

4. $xy' - y = x\operatorname{ctg}\frac{3y}{x}$; $\boxed{x^3\cos\frac{3y}{x} = C}$.

5. $xyy' = y^2 + 2x^2$; $\boxed{y^2 = 4x^2\ln|Cx|}$.

6. $(y+x-1)^2 dy - 2(y+2)^2 dx = 0$; $\boxed{\ln|y+2| + 2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3} = C}$.

7. $xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$; $\boxed{y = x\arcsin x}$.

8. $(x-y+4)dy = (x+y-2)dx = 0$; $\boxed{x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C}$.

§ 1.3. Лінійні диференціальні рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0, \tag{1.16}$$

де $\alpha(x) \neq 0$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ — неперервні функції. Термін лінійне рівняння пояснюється тим, що невідома функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому ступеню і не має добутків між ними.

Поділивши на $\alpha(x) \neq 0$, дістанемо рівняння:

$$y'(x) + p(x)y = q(x). \tag{1.17}$$

Є кілька методів інтегрування рівняння (1.17). Один із них (метод Бернуллі) полягає в тому, що розв'язок цього рівняння шукають у вигляді добутку двох невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$, тобто

$$y(x) = u(x) \cdot v(x). \tag{1.18}$$

Далі знаходять похідну

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \tag{1.19}$$

і, підставляючи значення (1.18) і (1.19) в рівняння (1.17), отримують рівняння

$$u'(x)v(x) + \left[v'(x) + v(x)p(x)\right]u(x) = q(x). \tag{1.20}$$

Функцію $v(x)$ обирають так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v'(x) + v(x)p(x) = 0, \tag{1.21}$$

тоді рівняння (1.20) приймає вигляд:

$$u'(x)v(x) = q(x). \tag{1.22}$$

Таким чином маємо два рівняння (1.21) і (1.22) з відокремлюваними змінними. Спочатку розв'язують рівняння (1.21):

$$v'(x) = -p(x)v(x);\ \frac{dv(x)}{dx} = -p(x)v(x);\ dv(x) = -p(x)v(x)dx;$$

$$\frac{dv(x)}{v(x)} = -p(x)dx;\ \ln|v(x)| = -\int p(x)dx + C;$$

поклавши $C = 0$, отримуємо $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$.

Знайдене значення $v(x)$ підставляють у рівняння (1.22) і розв'язують його відносно функції $u(x)$, залишаючи сталу C. Отримані значення $v(x)$ і $u(x,C)$ підставляють у вираз (1.18) і знаходять загальний розв'язок рівняння (1.17).

§ 1.4. Нелінійне рівняння першого порядку (рівняння Бернуллі)

Рівнянням Бернуллі називається нелінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,\ n \neq 0;\ n \neq 1;\ n \in Z. \tag{1.23}$$

Це нелінійне рівняння за допомогою заміни

$$z(x) = y^{1-n}(x) \tag{1.24}$$

зводиться до лінійного рівняння. Дійсно,

$$z'(x) = (1-n)y^{-n}y', \tag{1.25}$$

тоді після підстановки (1.24) і (1.25) у рівняння (1.23) дістанемо $z' + p(x)(1-n)z = (1-n)q(x)$, тобто лінійне рівняння відносно функції $z(x)$.

Проте на практиці розв'язок рівняння Бернуллі, як і розв'язок лінійного рівняння, шукають у вигляді $y(x) = u(x)v(x)$.

Завдання та запитання для самоконтролю

1. Яке диференціальне рівняння є лінійним?

2. Визначити, яке з диференціальних рівнянь лінійне: $y' + x^2 y = e^x$; $y' + y^2 = \cos x$; $y\,y' = \operatorname{tg} x$; $xy' + e^x y = 0$.

3. Яку заміну застосовують для розв’язання лінійних диференціальних рівнянь?

4. Який вигляд має рівняння Бернуллі?

5. Яким методом розв’язують рівняння Бернуллі?

Розв'язування типових лінійних диференціальних рівнянь

Приклад 3.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$.

Розв'язування. Розв’язуючи диференціальні рівняння першого порядку, доцільно спочатку визначити тип рівняння і в першу чергу з'ясувати, можливо чи ні відокремити змінні.

З'ясовуємо, що перетворити це рівняння до вигляду $P(y)dy = Q(x)dx$ (з відокремлюваними змінними) неможливо, бо якщо записати рівняння у вигляді $y' = \dfrac{y}{x} + x^2$, у правій частині маємо суму, а не добуток різних функцій.

У той же час похідна y' і функція y знаходяться у першому степеню і немає добутку між собою, тобто маємо лінійне диференціальне рівняння.

Тому робимо заміну: $y = uv$; $y' = u'v + v'u$. Ці значення підставляємо у задане рівняння. Дістаємо $u'v + v'u - \dfrac{uv}{x} = x^2$; $u'v + u\left(v' - \dfrac{v}{x}\right) = x^2$. Звідси отримуємо два рівняння відносно функцій u і v:

1) $v' - \frac{v}{x} = 0$ (вираз у дужках дорівнюємо нулю);

2) $u'v = x^2$.

Розв'язуємо перше рівняння:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x};\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};\ \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x};\ \ln|v| = \ln|x| + C;\ (C=0);\ v = x.$$

Друге рівняння приймає вигляд:

$$u'x = x^2;\ \frac{du}{dx} = x;\ du = xdx;\ \int du = \int xdx;\ u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Загальний розв'язок: $y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x$ або $y = \frac{x^3}{2} + Cx$.

Приклад 3.2. Знайти частинний розв'язок рівняння $xy' + y = 2x$, який задовольняє початкову умову $y(1) = -1$.

Розв'язування. Міркуючи, як у попередньому прикладі, визначаємо, що маємо лінійне диференціальне рівняння. Тому спочатку шукаємо його загальний розв'язок: $y = uv$; $y' = u'v + v'u$.

Задане рівняння доцільно записати у вигляді (розділивши на змінну x):

$$y' + \frac{y}{x} = 2 \text{ тоді } u'v + v'u + \frac{uv}{x} = 2;\ u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = 2;$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0;\ \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x};\ \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};\ \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|v| = -\ln|x| + C;\ (C=0);\ \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|;\ v = \frac{1}{x};$$

$$u'v = 2;\ \frac{1}{x}\frac{du}{dx} = 2;\ du = 2xdx;\ \int du = \int 2xdx;\ u = x^2 + C.$$

Загальний розв'язок $y = \left(x^2 + C\right)\frac{1}{x} = x + \frac{C}{x}$.

Знаходимо значення сталої C із початкової умови:

$$-1 = 1 + \frac{C}{1};\ C = -2.$$

Частинний розв'язок рівняння $y = x - \frac{2}{x}$.

Приклад 3.3. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' - y = x^2 \cos x$.

Розв'язування. Рівняння має функцію y і її похідну y' у першому ступені, і немає добутку між ними. Тому маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку, розв'язок якого шукаємо у вигляді добутку двох функцій $y = uv$, звідки $y' = u'v + v'u$.

Підставляємо ці значення у задане рівняння, яке спочатку шляхом ділення на x приводимо до стандартного вигляду:

$$y' - \frac{y}{x} = x\cos x;\ u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x\cos x.$$

Об'єднуємо другий і третій доданки, вираз у дужках дорівнюємо нулю і дістаємо два диференціальних рівняння відносно функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$u'v + \left(v' - \frac{v}{x}\right)u = x\cos x;$$

$$1)\ v' - \frac{v}{x} = 0;\ 2)\ u'v = x\cos x.$$

Розв'язуємо перше рівняння:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x};\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};\ \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x};\ \ln|v| = \ln|x| + \ln C.$$

Покладаємо, що $\ln C = 0$:

$$\ln|v| = \ln|x|;\ v = x.$$

Отримане значення для функції $v(x)$ підставляємо у друге рівняння:

$$u'x = x\cos x;\ \frac{du}{dx} = \cos x;\ du = \cos x dx;\ \int du = \int\cos x dx;\ u = \sin x + C.$$

Загальний розв'язок приймає вигляд $y = uv = (\sin x + C)x$.

Приклад 3.4. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$, який задовольняє початкову умову $y(1) = 1$.

Розв'язування. Маємо лінійне диференціальне рівняння (y та y' входять у рівняння у першому степеню і немає добутків між ними), тому робимо заміну $y = uv$; $y' = u'v + uv'$.

Розв'язуємо згідно з формулами (1.21)–(1.22)

$$u'v+uv'+\frac{3}{x}uv=\frac{2}{x^3};\ u'v+u\left(v'+\frac{3}{x}v\right)=\frac{2}{x^3};$$

$$v'+\frac{3}{x}v=0;\ \frac{dv}{dx}=-\frac{3v}{x};\ \frac{dv}{v}=-\frac{3dx}{x};\ \int\frac{dv}{v}=-3\int\frac{dx}{x}+C;\ C=0;$$

$$\ln|v|=-3\ln|x|=\ln\left|x^{-3}\right|;\ v=x^{-3}.$$

Розв'язуємо рівняння (1.22) для знаходження значення u:

$$u'x^{-3}=\frac{2}{x^3};\ \frac{du}{dx}=2;\ du=2dx;\ \int du=2\int dx+C;\ u=2x+C.$$

Отримаємо загальний розв'язок $y=(2x+C)x^{-3}$.

Знаходимо значення C із початкової умови:

$$1=(2+C)1^{-3};\ -1=2+C;\ C=-3.$$

Тоді частинний розв'язок $y=(2x-3)x^{-3}$.

Приклад 3.5. Розв'язати рівняння $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$.

Розв'язування. Маємо нелінійне рівняння Бернуллі згідно з означенням (1.23). Розв'язуємо тим же методом, що і лінійне рівняння, тобто за допомогою заміни $y=uv$; $y'=u'v+uv'$. Підставляємо ці значення у задане рівняння і визначаємо функції u і v:

$$u'v+uv'+uv=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{uv};\ uv'+u(v'+v)=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{u}\sqrt{v}:$$

$$1.\ v'+v=0;\ \frac{dv}{dx}=-v;\ \frac{dv}{v}-dx;\ \ln|v|=-x;\ v=e^{-x}.$$

$$2.\ e^{-x}u'=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{e^{-x}}\sqrt{u};\ e^{-x}\frac{du}{dx}=\sqrt{u};\ \frac{du}{\sqrt{u}}=e^{x}dx;$$

$$\int u^{-\frac{1}{2}}du=\int e^{x}dx+C;\ 2\sqrt{u}=e^{x}+C;\ u=\frac{\left(e^{x}+C\right)^2}{4}.$$

$$y=uv=\frac{\left(e^{x}+C\right)^2}{4}e^{-x}$$ - загальний розв'язок.

Приклад 3.6. Знайти розв'язок задачі Коші $\cos xdy+y\sin xdx=dx$, $y(0)=1$.

Розв'язування. Поділивши обидві частини рівняння на добуток $\cos x dx$, отримуємо лінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}.$$

Робимо заміну: $y = uv$; $y' = u'v + v'u$.

Маємо

$$u'v + v'u + uv\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x};\ u'v + u\left[v' + v\,\mathrm{tg}\,x\right] = \frac{1}{\cos x}:$$

1. $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$; $\int \frac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}\,x dx$; $\ln|v| = \ln|\cos x|$; $v = \cos x$.

2. $u'v = \frac{1}{\cos x}$; $\frac{du}{dx}\cos x = \frac{1}{\cos x}$; $\int du = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$; $u = \mathrm{tg}\,x + C$.

Загальний розв'язок: $y = uv = (\mathrm{tg}\,x + C)\cos x$; $y = \sin x + C\cos x$.

Знайдемо значення сталої C, за якого частинний розв'язок задовольняє початкову умову:

$$1 = \sin 0 + C\cos 0; \quad C = 1.$$

Частинний розв'язок: $y = \sin x + \cos x$.

Приклад 3.7. Розв'язати рівняння $\left(2xy + y^3\right)dy - dx = 0$.

Розв'язування. Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то це рівняння можна записати у вигляді $y' = \frac{1}{2xy + y^3}$.

Отримане рівняння нелінійне і відомими методами його розв'язати неможливо. Але якщо змінну x вважати функцією y, $x' = \frac{dx}{dy}$, то задане рівняння перетворюється до лінійного шляхом його ділення вже на dy: $x' - 2yx = y^3$. Розв'яжемо це рівняння:

$$x = uv;\ x' = u'v + uv';\ u'v + uv' - 2uvy = y^3;\ u'v + u\left(v' - 2vy\right) = y^3:$$

1. $v' - 2vy = 0$; $\frac{dv}{v} = 2ydy$; $\ln|v| = y^2 + C$; $v = e^{y^2}$ (бо $C = 0$).

2. $\frac{du}{dy}e^{y^2} = y^3$; $du = y^3 e^{-y^2} dy$;

$$u=\int y^3e^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\int y^2e^{-y^2}dy^2=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\left(1+y^2\right)+C.$$

$$x=uv=Ce^{y^2}-\frac{1}{2}\left(1+y^2\right).$$

Приклад 3.8. Розв'язати рівняння $y'+\frac{y}{x}=x^2y^4$.

Розв'язування. Визначаємо, що маємо нелінійне рівняння, бо є множник y^4, а точніше рівняння Бернуллі (ліва частина цього рівняння збігається з лівою частиною лінійного рівняння). Нагадуємо, що рівняння Бернуллі розв'язують, як і лінійне рівняння, заміною $y=uv$.

Отримуємо

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=x^2(uv)^4;\; u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=x^2u^4v^4;$$

$$v'+\frac{v}{x}=0;\; \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x};\; v=\frac{1}{x};$$

$$u'\frac{1}{x}=x^2u^4\frac{1}{x^4};\; \frac{du}{u^4}=\frac{dx}{x};\; -\frac{1}{3u^3}=\ln|Cx|;\; u=-\sqrt[3]{\frac{1}{3\ln|Cx|}};$$

$$y=-\frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln|Cx|}}.$$

Завдання для аудиторної роботи

Знайти загальний, а де задана початкова умова, частинний розв'язок диференціального рівняння:

1. $xy'+y=3x^2$.
2. $y'-\frac{y}{x}=2x^2,\; y(-1)=-2$.
3. $xy'+y=\sin 2x$.
4. $xy'+y=x^3y^4$.
5. $y'-2y=e^{2x},\; y(0)=2$.
6. $xy'-y=x^2\sqrt{y},\; y(1)=1$.

Домашнє завдання

1. $y'+\frac{2}{\sin x\cos x}y=\cos^2 x$; $\boxed{y=\frac{2x-\sin 2x+C}{4\,\mathrm{tg}^2\,x}}$.

2. $y' + \dfrac{2e^x}{1+e^x} y = \dfrac{2x}{\left(1+e^x\right)^2}$, $y(0)=0$; $\boxed{y = \dfrac{x^2}{\left(1+e^x\right)^2}}$.

3. $y' = 2y + e^x - x$, $y(0) = \dfrac{1}{4}$; $\boxed{y = e^{2x} - e^x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}}$.

4. $y'\left(1+x^2\right) - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$; $\boxed{y = (C+x)\left(1+x^2\right)}$.

5. $y' - \dfrac{8}{x}y + 4x\sqrt{y} = 0$; $\boxed{y = \left(x^2 + Cx^4\right)^2}$.

6. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = 4xy^2$; $\boxed{y = \dfrac{\ln x}{C + x^2 - 2x^2 \ln x}}$.

7. $y' - \dfrac{2}{x}y + \dfrac{\cos 2x}{x^2}y^2 = 0$; $\boxed{y = \dfrac{2x^2}{C + \sin 2x}}$.

8. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x}$; $y(1) = 0$; $\boxed{y = 2(x-1)x^{-1}}$.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Основні означення

Загальний вигляд лінійного диференціального рівняння n-го порядку:

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_0(x)y = \varphi(x), \qquad (2.1)$$

де $b_i(x)$ - задані функції $(i = 0,1,\ldots,n)$.

Функції $b_i(x)\,(i = 0,1,\ldots,n)$ називаються *коефіцієнтами* рівняння, а функцію $\varphi(x)$ – його *вільним членом*. Якщо вільний член $\varphi(x) = 0$, то рівняння (2.1) називається *однорідним*, а якщо $\varphi(x) \neq 0$, то *неоднорідним*.

Коефіцієнт $b_n(x) \neq 0$, тому, поділивши рівняння (2.1) на $b_n(x)$, отримаємо його у вигляді

$$y^{(n)} + d_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + d_0(x)y = f(x), \qquad (2.2)$$

де $d_i(x) = \dfrac{b_i(x)}{b_n(x)}$; $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{b_n(x)}$; $(i = 0,1,\ldots,n)$.

Надалі розглядатимемо лише такі рівняння, тому що рівняння (3.1) завжди можна звести до вигляду (3.2) і вважатимемо, що $d_i(x)$, $f(x)$ є неперервними функціями.

§ 2.1. Рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$

Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2.3}$$

де $f(x)$ – задана неперервна функція. Розв'язок цього рівняння знаходять шляхом його послідовного інтегрування. Враховуючи, що $y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right)$, запишемо це рівняння у вигляді $\frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = f(x) \Rightarrow d\left(y^{(n-1)}\right) = f(x)dx$.

Інтегруючи, дістанемо $\int d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$, де C_1 – стала інтегрування.

Аналогічно знаходимо, згадуючи, що $y^{(n-1)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-2)}\right)$,

$$d\left(y^{(n-2)}\right) = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx \Rightarrow y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2.$$

Продовжуючи далі, після n інтегрувань знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.3).

Розв'язання типових прикладів

Приклад 4.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' - e^{2x} = 0$.

Розв'язування. Маємо диференціальне рівняння третього порядку, яке доцільно записати у вигляді $y''' = e^{2x}$. Згідно з теорією його треба послідовно про інтегрувати тричі.

Отримуємо:

$$\frac{dy''}{dx} = e^{2x};\ \int dy'' = \int e^{2x}dx;\ y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;\ \int dy' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx;\ y' = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;\ \int dy = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right)dx;$$

$$y=\frac{1}{8}e^{2x}+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

Приклад 4.2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''=\frac{1}{6}x-8$, який задовольняє умови $y(0)=2$, $y'(0)=-1$.

Розв'язування. Задані рівняння треба спочатку двічі проінтегрувати для знаходження загального розв'язку.

Маємо:

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{6}x-8;\ \int dy'=\int\left(\frac{1}{6}x-8\right);$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}x^2-8x+C_1; \qquad \text{(A)}$$

$$\int dy=\int\left(\frac{1}{3}x^2-8x+C_1\right)dx;$$

$$y=x^3-4x^2+C_1x+C_2. \qquad \text{(B)}$$

Знаходимо значення довільних сталих із початкових умов. Отримаємо із виразів (A) і (B):

$$\begin{cases}-1=C_1;\\ 2=C_2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-1,\\ C_2=2.\end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок приймає вигляд $y=x^3-4x^2-x+2$.

Приклад 4.3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'''-\cos x=x$.

Розв'язування. Маємо диференціальне рівняння третього порядку, тому доводимо його до вигляду $y^{(n)}=f(x)$ і послідовно інтегруємо тричі:

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=x+\cos x;\ \int dy''=\int(x+\cos x)dx;\ y''=\frac{x^2}{2}+\sin x+C_1;$$

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{x^2}{2}+\sin x+C_1;\ \int dy'=\int\left(\frac{x^2}{2}+\sin x+C_1\right)dx+C_2;$$

$$y'=\frac{x^3}{6}-\cos x+C_1x+C_2;\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{6}-\cos x+C_1x+C_2;$$

$$\int dy = \int\left(\frac{x^3}{6} - \cos x + C_1 x + C_2\right)dx + C_3\,;\ y = \frac{x^4}{24} - \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3\,.$$

Завдання для аудиторної роботи

Знайти загальний, а де задана початкова умова, частинний розв'язок диференціального рівняння:

1. $y'' - \cos^2 x = 0$.

2. $y'' - e^{2x} = 1$.

3. $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 1$.

4. $xy'' - \sqrt{x} = 0$.

Домашнє завдання

1. $y''\sin^2 x = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; $\boxed{y = -\ln|\sin x| + 2}$.

2. $y''' - 4e^{2x} = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$; $\boxed{y = \dfrac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 - x - \dfrac{1}{2}}$.

3. $e^x y'' = 1 + e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$; $\boxed{y = e^{-x} + e^x + x}$.

4. $x^2 y'' + 2 = 0$; $\boxed{y = 2\ln x + C_1 x + C_2}$.

§ 2.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = 0\,. \tag{2.4}$$

Введемо такі означення.

Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними на проміжку* $[a;b]$, якщо їх відношення на цьому інтервалі не є сталим числом, тобто

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \lambda, \text{ де } \lambda \text{ — стале число.} \tag{2.5}$$

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ *лінійно залежні на проміжку* $[a;b]$, коли існує таке стале число λ, що для всіх $x \in [a;b]$ виконується рівність

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda \Rightarrow y_1(x) = \lambda y_2(x). \qquad (2.6)$$

Приклади. $y_1 = x$, $y_2 = 2x$, $y_3 = x^2$; функції y_1, y_2 — лінійно залежні, тому що $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = \text{const}$, y_1, y_3 — лінійно незалежні $\frac{y_1}{y_3} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Теорема. *Структура загального розв'язку однорідного рівняння.* Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — два лінійно незалежні на проміжку $[a;b]$ розв'язки рівняння (2.4), то функція

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (2.7)$$

є його загальним розв'язком, де C_1, C_2 — довільні сталі.

§ 2.3. Лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$y'' + py' + gy = 0, \qquad (2.8)$$

де p, g — дійсні числа.

Згідно з теоремою попереднього розділу, щоб знайти його загальний розв'язок, потрібно знайти його два лінійно незалежних частинних розв'язків. Ейлер запропонував шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді

$$y = e^{kx}, \qquad (2.9)$$

де k — невідома стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти.

Враховуючи, що $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, підставивши ці значення у рівняння (3.7), дістанемо:

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + g\right) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + g = 0. \qquad (2.10)$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (2.10), то функція (2.9) буде розв'язком рівняння (2.8). Квадратне рівняння (2.10) називається *характеристичним рівнянням диференціального рівняння* (2.8).

Розв'язуючи рівняння (2.10), дістанемо два корені:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}. \qquad (2.11)$$

Можливі три випадки:

1) корені характеристичного рівняння дійсні і різні числа (коли $D=\frac{p^2}{4}-g>0$), тобто $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку частинними розв'язками рівняння (2.8) є функції $y_1=e^{k_1 x}$, $y_2=e^{k_2 x}$. Ці розв'язки лінійно незалежні, тому що при $k_1 \neq k_2$ $\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}}=e^{(k_1-k_2)x} \neq \text{const}$. Згідно з теоремою попереднього розділу загальний розв'язок рівняння (2.8) знаходять за формулою

$$y_1=C_1 e^{k_1 x}+C_2 e^{k_2 x}; \tag{2.12}$$

2) корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:

$$k_1=k_2=k,\ \left(D=\frac{p^2}{4}-g=0\right),\ k=-\frac{p}{2}, \tag{2.13}$$

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{kx}}{xe^{kx}}=\frac{1}{x}\neq \text{const}.$$

У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (2.8) має вигляд

$$y=C_1 e^{kx}+C_2 x e^{kx}=e^{kx}\left(C_1+xC_2\right); \tag{2.14}$$

3) корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:

$$k=\alpha \pm i\beta, \tag{2.15}$$

де $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{\frac{p^2}{4}-g}$ (випадок, коли $D<0$).

Можливо довести, що у цьому випадку загальний розв'язок диференціального рівняння (2.8) має вигляд

$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right). \tag{2.16}$$

Висновок: Для розв'язування однорідного диференціального рівняння (2.8) потрібно скласти характеристичне рівняння (2.10) і знайти його корені. У залежності від вигляду коренів використати одну з формул (2.12), (2.14), (2.16).

Це правило можна розповсюдити на лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку. Тобто для рівняння $y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_n=0$ складають характеристичне рівняння $k^n+a_1 k^{n-1}+\ldots+a_n=0$ і в залежності від коренів використовують формули (2.12), (2.14) або (2.16).

Завдання та запитання для самоконтролю

1. Що називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку?

2. Що називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку?

3. Яка структура загального розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку?

4. Які функції називаються лінійно незалежними?

5. Яке із наведених рівнянь є лінійним і однорідним: $y'' + y^2 = 0$; $y'' + (y')^2 = 0$; $y'' + 2y' - y = 0$?

6. Який вигляд має характеристичне рівняння однорідного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$?

7. Який загальний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = 0$, коли корені характеристичного рівняння:

а) дійсні і різні $(k_1 \neq k_2)$;

б) дійсні і рівні $(k_1 = k_2)$;

в) комплексні спряжені.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 5.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння, замінюючи похідну на k у відповідному степеню, $k^2 - 5k + 6 = 0$. Знаходимо його корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Маємо дійсні і різні корені, тому шуканий розв'язок має вигляд згідно з формулою (2.12): $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Приклад 5.2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y' + 20y = 0$.

Розв'язування. Складаємо відповідне характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 20 = 0$.

Знаходимо його корені $k_{1,2} = -2 \pm 4i$. Маємо третій випадок (корені комплексні $\alpha = -2$; $\beta = 4$). Тому згідно з формулою (2.16) загальний розв'язок рівняння $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.

Приклад 5.3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' = 0$, який задовольняє початкові умови $y(x=0)=0$, $y'(x=0)=-4$.

Розв’язування. Характеристичне рівняння цього диференціального рівняння $k^2-2k=0$ має дійсні різні корені $k_1=0$; $k_2=2$.

Тому загальний розв'язок має вигляд

$$y(x)=C_1e^{0x}+C_2e^{2x};\ y(x)=C_1+C_2e^{2x}.$$

Знаходимо похідну

$$y'(x)=2C_2e^{2x}$$

і згідно з початковими умовами складаємо систему рівнянь відносно C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ 2C_2=-4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=-2, \\ C_1=2. \end{cases}$$

Таким чином, $y=2\left(1-e^{2x}\right)$ — частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови.

Приклад 5.4. Розв'язати рівняння $y''+6y'+9y=0$.

Розв'язування. Корені характеристичного рівняння $k^2+6k+9=0$ дійсні і рівні $k_1=k_2=-3$.

Тому загальний розв'язок згідно з (2.14)

$$y=e^{-3x}\left(C_1+C_2x\right).$$

Завдання для аудиторної роботи

Знайти загальний, а де задані початкові умови — частинний розв'язок рівняння:

1. $2y''-5y'+3y=0$.
2. $y''+6y'+9y=0$.
3. $y''-4y'+8y=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=0$.
4. $2y''+4y'=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=-1$.
5. $y''+y=0$; $y(\pi)=1$; $y'(\pi)=-1$.

Домашнє завдання

Знайти загальний розв'язок рівняння:

1. $y'' - 4y' + 5y = 0$; $\boxed{y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)}$.

2. $2y'' - 5y' + 2y = 0$; $\boxed{y = e^{2x}\left(C_1 e^{0,5x} + C_2 e^{2x}\right)}$.

3. $y'' + 4y' + 4y = 0$; $\boxed{y = C_1 e^{2x} + x C_2 e^{2x}}$.

4. $y'' + 4y' + 5y = 0$; $\boxed{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}$.

5. $y'' + 3y' = 0$; $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-3x}}$.

Знайти частинний розв'язок рівняння, який задовольняє початкові умови:

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$; $\boxed{y = -\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-3x}\right)}$.

2. $y'' + 4y' + 16y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$; $\boxed{y = xe^{-x}}$.

3. $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; $\boxed{y = e^{-x}\left(\cos 2x + \sin 2x\right)}$.

§ 2.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Розглянемо тепер неоднорідне лінійне рівняння другого порядку

$$y'' + \alpha_1(x) y' + \alpha_0(x) y = f(x). \tag{2.17}$$

Лінійне однорідне рівняння

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0, \tag{2.18}$$

ліва частина якого збігається з лівою частиною рівняння (2.17), називається відповідним йому однорідним рівнянням.

Теорема. *Структура загального розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння.* Загальним розв'язком неоднорідного рівняння (2.17) є сума його довільного частинного розв'язку $y^*(x)$ і загального розв'язку $\overline{y}(x)$ відповідного однорідного рівняння (2.18)

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x). \tag{2.19}$$

Довести самостійно твердження: Якщо права частина рівняння (2.17) є лінійною комбінацією двох функцій, тобто $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ і відомі частинні розв'язки $\overline{y}_1(x), \overline{y}_2(x)$ неоднорідних рівнянь $y'' + py' + gy = f_1(x)$, $y'' + py' + gy = f_2(x)$ відповідно, то функція $\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) \pm \overline{y}_2(x)$ буде частинним розв'язком рівняння $y'' + py' + gy = f_1(x) \pm f_2(x)$.

§ 2.5. Метод варіації довільних сталих

Цей метод розв'язування неоднорідного диференціального рівняння є загальним і його можливо використовувати для довільної правої частини рівняння. Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + gy = f(x). \tag{2.20}$$

Нехай

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{2.21}$$

— загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' + py' + gy = 0. \tag{2.22}$$

Як відомо, він залежить від типу коренів характеристичного рівняння $k^2 + pk + g = 0$. Згідно з методом варіації довільних сталих розв'язок рівняння (2.20) шукають у вигляді (2.21), де сталі C_1 і C_2 замінюють на невідомі функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ і визначають їх так, щоб функція

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \tag{2.23}$$

була розв'язком рівняння (2.20).

Знайдемо похідну

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'. \tag{2.24}$$

Накладемо на невідомі C_1 і C_2 умову, щоб

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \tag{2.25}$$

Тоді похідна y' згідно з умовою (2.24) набере вигляду

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'. \tag{2.26}$$

Знайдемо другу похідну

$$y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''. \tag{2.27}$$

Підставивши значення y (2.23), y' (2.26) і y'' (2.27) в рівняння (2.20), дістанемо після тотожних перетворень:

$$C_1\left[y_1'' + py_1' + gy_1\right] + C_2\left[y_2'' + py_2' + gy_2\right] + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \tag{2.28}$$

Оскільки y_1 і y_2 — розв'язки однорідного рівняння (2.22), то вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, а тому

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \tag{2.29}$$

Таким чином, для знаходження C_1' і C_2' отримали таку систему рівнянь, об'єднуючи (2.25) і (2.29):

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (2.30)$$

Система (2.30) має єдиний розв'язок, тому що y_1 і y_2 — лінійно незалежні розв'язки.

Розв'язуючи систему (2.30), знаходимо $C_1' = \varphi(x)$ та $C_2' = \psi(x)$, де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — деякі функції від x.

Інтегруючи ці функції, знаходимо:

$$C_1(x) = \int \varphi(x)dx + c_1, \; C_2(x) = \int \psi(x)dx + c_2,$$

а потім за формулою (2.23) шуканий розв'язок рівняння (2.20).

Висновок. Згідно з методом варіації довільних сталих спочатку знаходять частинні розв'язки y_1 і y_2 відповідного однорідного рівняння (які залежить від типу коренів характеристичного рівняння). Далі складають систему рівнянь (2.30) і знаходять її розв'язок. Потім, інтегруючи, знаходять $C_1(x)$ та $C_2(x)$; знайдені значення підставляють у вираз (2.23), який і буде розв'язком рівняння (2.20).

Приклад 6.1. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Розв'язування. Відповідне однорідне рівняння $y'' + 4y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$. Корені $k_{1,2} = \pm 2i$ - комплексні. Загальний розв'язок однорідного рівняння $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді $y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$.

Визначаємо звідси, що $y_1 = \cos 2x$; $y_2 = \sin 2x$ (функції, що знаходяться біля C_1 і C_2 відповідно). Визначаємо $y_1' = -2\sin 2x$; $y_2' = 2\cos 2x$.

Складаємо систему рівнянь (2.30):

$$\begin{cases} C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0, \\ -2C_1' \sin 2x + 2C_2' \cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}; \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему:

$$\begin{cases} C_2' = -\dfrac{C_1'\cos 2x}{\sin 2x}, \\ -2C_1'\sin 2x - \dfrac{2C_1'\cos^2 2x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{\cos 2x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{\sin 2x}{2\cos 2x} = -\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2}, \\ C_2' = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Інтегруємо знайдені функції $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{2}\int \operatorname{tg} 2x dx + C_1, \\ C_2(x) = \dfrac{1}{2}\int dx + C_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1, \\ C_2(x) = \dfrac{x}{2} + C_2. \end{cases}$$

Загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = \left(C_1 + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\right)\cos 2x + \left(\frac{x}{2} + C_2\right)\sin 2x .$$

§ 2.6. Неоднорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{2.31}$$

де p, q — дійсні числа.

Згідно з теоремою попереднього розділу загальний розв'язок такого рівняння являє собою суму частинного розв'язку рівняння (2.31) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Частинний розв'язок можливо знайти в квадратурах методом варіації довільних сталих. Проте для рівнянь із спеціальною правою частиною частинний розв'язок можна знайти значно простіше.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

Права частина в рівнянні (2.31) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{mx}, \tag{2.32}$$

де m — дійсне число, $P_n(x)$ — многочлен степеня n.

В цьому випадку частинний розв’язок рівняння (2.31) шукають у вигляді

$$y^* = Q_n(x)e^{mx}x^r, \tag{2.33}$$

де $Q_n(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n$ — повний многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами $A_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$.

Показник степеня r знаходять шляхом зіставлення показника m в правій частині рівняння з коренями k_1 і k_2 характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$ за таким правилом:

$$r = \begin{cases} 0, & \text{коли } m \neq k_1 \text{ та } m \neq k_2, \\ 1, & \text{коли дійсні корені } k_1 \neq k_2, \text{але } m = k_1 \text{ або } m = k_2, \\ 2, & \text{коли } k_1 = k_2 = m. \end{cases} \quad (2.34)$$

Таким чином, r — число дійсних коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють m. Для знаходження невідомих коефіцієнтів $A_i \left(i = 0, 1, \ldots, n\right)$ вираз (2.33) підставляють у рівняння (2.31) і отримують тотожність поліномів, після скорочення на e^{mx}. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x або надаючи x певних значень, отримують систему $(n+1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначають $(n+1)$ невідомих коефіцієнтів $A_i \left(i = 0, 1, \ldots, n\right)$.

Права частина рівняння (2.31) має вигляд

$$f(x) = A\cos nx + B\sin nx, \quad (2.35)$$

де n, A, B — дійсні числа.

Частинний розв'язок у цьому випадку шукають у вигляді

$$y^* = \left(M\cos nx + N\sin nx\right)x^r, \quad (2.36)$$

де M, N — невизначені коефіцієнти.

Показник степеня r знаходять шляхом зіставлення числа n з коренями характеристичного рівняння:

$$r = \begin{cases} 1, & \text{коли } k_{1,2} = \pm ni, \alpha = 0, \beta = n; \\ 0, & \text{для всіх інших коренів.} \end{cases} \quad (2.37)$$

Невідомі коефіцієнти M і N знаходять підстановкою (2.36) в рівняння (2.31). Прирівнюючи коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях у знайденій рівності, отримуємо систему з двох лінійних рівнянь відносно M і N.

Загальний випадок. Права частина рівняння (2.31) є

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right), \quad (2.38)$$

де $P_n(x)$ — многочлен степеня n і $R_m(x)$ — многочлен степеня m, α, β — дійсні числа.

Частинний розв'язок рівняння (2.31) у цьому випадку треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}\left(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x\right), \tag{2.39}$$

де $Q_s(x)$, $L_s(x)$ — многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s — найбільше з чисел m і n, r — число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$. Невідомі коефіцієнти поліномів $Q_s(x)$ і $L_s(x)$ знаходять як і у першому та другому випадку.

Зауваження 1. Шукані многочлени $Q_n(x)$, $Q_s(x)$, $L_s(x)$ мають бути повними, тобто містити всі степені x від 0 до n або s, незалежно від того, чи повним є заданий многочлен $P_n(x)$ $\left(R_m(x)\right)$.

Зауваження 2. Якщо права частина рівняння (2.31) є сумою декількох різних за структурою функцій вигляду (2.32), (2.35), (2.38), тобто $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ частинний розв'язок рівняння (2.31) шукають у вигляді $y^* = y_1^* \pm y_2^*$, де y_1^*, y_2^* — частинні розв'язки рівняння (2.31) для правої частини $f_1(x)$ і $f_2(x)$ відповідно.

Завдання та запитання для самоконтролю

1. Який вигляд має неоднорідне диференціальне лінійне рівняння другого порядку?

2. Визначити, яке з рівнянь є лінійним і неоднорідним: $y'' + 2y' + y = 0$; $y'' + 4y = \cos 2x$; $y'' + yy' = \sin x$.

3. Яка структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку?

4. Яку систему рівнянь треба скласти згідно з методом варіації довільних сталих?

5. У якому вигляді шукають частинний розв'язок рівняння:

а) $y'' + py' + qy = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$;

б) $y'' + py' + qy = e^{mx}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right)$;

в) $y'' + py' + qy = A\cos nx + B\sin nx$?

Розв'язування типових прикладів

Приклад 7.1. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 2x + 3$.

Розв'язування. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ буде $\overline{y}(x) = e^x\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Оскільки правою частиною даного рівняння є функція вигляду $P_1(x)e^{0x} = e^{0x}(2x+3)$, тобто $m = 0, m \neq k_1, m \neq k_2$, то згідно з (2.33) і (2.34) частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_1(x)e^{0x} = Ax + B$, де A, B — невідомі коефіцієнти.

Знайшовши похідні $\left(y^*\right)' = B$; $\left(y^*\right)'' = 0$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо $-2B + A + Bx = 2x + 3$. Прирівнюючи коефіцієнти при x і вільні члени, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} B = 2, \\ -2B + A = 3, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} B = 2, \\ A = 7. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд $y^*(x) = 2x + 7$, тому шуканий загальний розв'язок $y = \bar{y}(x) + y^*(x) = e^x(C_1 + C_2 x) + 2x + 7$.

Приклад 7.2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + y' + 2y = 4\sin 2x$, який задовольняє початкові умови: $y(0) = -3$, $y'(0) = \sqrt{7}$.

Розв'язування. Корені характеристичного рівняння $k^2 + k + 2 = 0$ дорівнюють $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$.

Тому загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right).$$

Згідно з (2.36) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$y^* = M\cos 2x + N\sin 2x$ ($r = 0$, тому що $\beta = 2$ і $k_{1,2} \neq \beta i$).

Тоді

$$\left(y^*\right)' = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x; \quad \left(y^*\right)'' = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x.$$

Підставляємо отримані вирази у задане рівняння

$$-4M\cos 2x - 4N\sin 2x - 2M\sin 2x + 2N\cos 2x + 2M\cos 2x + 2N\sin 2x = 4\sin 2x;$$

$$(2M+2N-4M)\cos 2x+(2N-2M-4N)\sin 2x=4\sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$, отримуємо систему рівнянь відносно M і N:

$$\begin{cases} 2N-2M=0, \\ -2N-2M=4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=-1, \\ N=-1. \end{cases}$$

Отже загальний розв'язок заданого рівняння

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)-\cos 2x-\sin 2x. \qquad \text{(a)}$$

Знаходимо похідну:

$$y'=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(-C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x-C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x-\sqrt{7}C_1\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x+\sqrt{7}C_2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+$$

$$+2\sin 2x-2\cos 2x.$$

Згідно з заданими початковими умовами дістанемо систему рівнянь відносно C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1-1=-3, \\ \frac{1}{2}\left(-C_1+\sqrt{7}C_2-2\right)=\sqrt{7}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-2, \\ C_2=2. \end{cases}$$

Підставляємо отримані значення у вираз (а) і визначаємо частинний розв'язок рівняння

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(-2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)-\cos 2x-\sin 2x.$$

Приклад 7.3. Розв'язати рівняння $y''-2y'-3y=(x+2)e^{3x}$.

Розв'язування. Задано неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку із спеціальною правою частиною $f(x)=P_n(x)e^{3x}$.

Тому його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y=\overline{y}+y^*$, де $\overline{y}$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, який залежить від вигляду коренів характеристичного рівняння; y^* — частинний розв'язок, який визначається виглядом правої частини $f(x)$.

Характеристичне рівняння $k^2-2k-3=0$ має корені $k_1=-1$, $k_2=3$, тому

$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

Оскільки права частина відповідає випадку (формули 2.32–2.34)

$$f(x) = P_n(x)e^{mx} \ \left(P_n(x) = x + 2; m = 3\right) \text{ і } m = k_2 = 3,\ m \neq k_1, \text{ тобто } r = 1,$$

то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = (A + Bx)e^{3x}x = \left(Ax + Bx^2\right)e^{3x}.$$

Знаходимо

$$\left(y^*\right)' = \left(3Ax + 3Bx^2 + A + 2Bx\right)e^{3x},\ \left(y^*\right)'' = \left(6A + 12Bx + 9Ax + 9Bx^2\right)e^{3x}.$$

Підставивши y^*, $\left(y^*\right)'$, $\left(y^*\right)''$ у дане рівняння, після спрощень дістаємо

$$8Bx + 2B + 4A = x + 2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x і вільні члени в отриманій рівності, складаємо систему рівнянь відносно A і B:

$$\begin{cases} 8B = 1, \\ 2B + 4A = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{1}{8}, \\ A = \dfrac{7}{16}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок набуває вигляд

$$y^* = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right)e^{3x},$$

а загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right)e^{3x}.$$

Приклад 7.4. Розв'язати рівняння $y'' + \dfrac{5}{2}y' = 5x^2 - \dfrac{4}{25}$.

Розв'язування. Маємо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Враховуючи, що права частина — раціональна функція, приймаємо метод невизначених коефіцієнтів, тобто розв'язок рівняння шукаємо у вигляді

$$y = \overline{y} + y^*.$$

Складаємо характеристичне рівняння і визначаємо його корені:

$$k^2+\frac{5}{2}k=0;\quad k_1=0,\quad k_2=-\frac{5}{2}.$$

Тоді

$$\overline{y}=C_1e^{0x}+C_2e^{-2,5x}=C_1+C_1e^{-2,5x}.$$

Частинний розв'язок y^* (праву частину подаємо у вигляді $f(x)=e^{0x}\cdot P_n(x)$, де $P_n(x)=5x^2-\frac{4}{25}$) знаходимо у вигляді

$$y_1^*=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot x^r=Ax^3+Bx^2+Cx,$$

$r=1$, тому що $m=k_1=0$ (за формулами 2.32–2.34).

Знаходимо частинні похідні

$$\left(y^*\right)'=3Ax^2+2Bx+C;\quad \left(y^*\right)''=6Ax+2B$$

і отримані значення підставляємо у задане рівняння:

$$\frac{15}{2}Ax^2+(6A+5B)x+2B+\frac{5}{2}C=5x^2-\frac{4}{25}.$$

Складаємо систему рівнянь відносно A, B, C, прирівнюючи коефіцієнти при x^2, x і вільні члени в отриманій рівності:

$$\begin{cases}\frac{15}{2}A=5;\\ 6A+5B=0;\\ 2B+\frac{5}{2}C=-\frac{4}{25}.\end{cases}$$

Визначаємо, що $A=\frac{2}{3};\quad B=-\frac{4}{5};\quad C=\frac{72}{125}.$

Тоді

$$y^*=\frac{2}{5}x^3-\frac{4}{5}x^2+\frac{72}{125}x.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$y=C_1+C_2e^{-2,5x}+\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{5}x^2+\frac{72}{125}x.$$

Приклад 7.5. Розв'язати рівняння $y'' - y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Розв'язування. Визначаємо, що це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, права частина якого $\left(f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \right)$ не задовольняє умову спеціального вигляду. Тому знаходити розв'язок цього рівняння треба методом варіації довільних сталих.

Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' - y = 0;\ k^2 - 1 = 0;\ k_1 = 1;\ k_2 = -1;\ \overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Визначаємо, що $y_1(x) = e^x$ (функція, яка знаходиться біля сталої C_1) і $y_2(x) = e^{-x}$ (функція біля C_2). Розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$. Значення невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ визначаємо із системи (2.30).

Враховуючи, що $y_1'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$; $y_2'(x) = \left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$, маємо

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} = 0, \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} = \dfrac{e^x}{1+e^x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = -\dfrac{C_1'e^x}{e^{-x}}, \\ 2C_1'e^x = \dfrac{e^x}{1+e^x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = -C_1'e^{2x}, \\ C_1' = \dfrac{1}{2\left(1+e^x\right)}. \end{cases}$$

Знаходимо C_1, інтегруючи друге рівняння системи $C_1(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{2\left(1+e^x\right)}$;

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \left\{ \begin{matrix} 1+e^x = t; & e^x = t-1; \\ e^x dx = dt; & dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t-1} \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t| + \overline{C_1} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + \overline{C_1} = \ln\left|\frac{1+e^x-1}{1+e^x}\right| + \overline{C_1} = \ln e^x - \ln\left|1+e^x\right| + \overline{C_1} =$$

$$= x - \ln\left(1+e^x\right) + \overline{C_1}.$$

$$C_1(x)=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(1+e^x\right)\right)+\overline{C_1}.$$

Із першого рівняння системи $C_2'(x)=-\dfrac{e^{2x}}{2\left(1+e^x\right)}$, тоді

$$C_2(x)=-\int\frac{e^x\cdot e^x}{2\left(1+e^x\right)}dx=\left\{\begin{array}{l}e^x=t;\\ e^xdx=dt\end{array}\right\}-\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{t+1}=-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(t-\ln|t+1|\right)+\overline{C_2}=-\frac{1}{2}\left(e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right)+\overline{C_2}.$$

Остаточно загальний розв'язок рівняння приймає вигляд

$$y=\left[x-\ln\left(1+e^x\right)+\overline{C_1}\right]e^x-\frac{1}{2}\left[e^x-\ln\left(e^x+1\right)+\overline{C_2}\right]e^{-x}.$$

Приклад 7.6. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''+y=\operatorname{tg}x$, який задовольняє початкові умови $y(0)=0$; $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

Розв'язування. Маємо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння, права частина якого не має спеціального вигляду. Застосовуємо знову, як у попередньому прикладі, метод варіації довільних сталих. Характеристичне рівняння $k^2+1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm i$, а тому загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Розв'язок заданого неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$, де функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases}C_1'y_1+C_2'y_2=0;\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x),\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}C_1'\cos x+C_2'\sin x=0;\\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=\operatorname{tg}x.\end{cases}$$

Розв'язок цієї системи $C_1'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$; $C_2'(x)=\sin x$. Звідси

$$C_1(x)=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx=\int\cos xdx-\int\sec xdx;$$

$$C_1(x)=\sin x-\ln(\sec x+\operatorname{tg}x)+\overline{C_1};\ C_2(x)=\int\sin xdx=-\cos x+\overline{C_2}.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданого рівняння

$$y=\left[\sin x-\ln\left(\sec x+\operatorname{tg}x\right)+\overline{C_1}\right]\cos x+\left[\overline{C_2}-\cos x\right]\sin x;$$

$$y=\overline{C_1}\cos x+\overline{C_2}\sin x-\cos x\ln\left(\sec x+\operatorname{tg}x\right).$$

Значення довільних сталих $\overline{C_1}$ і $\overline{C_2}$ знаходимо із початкових умов.

Маємо

$$\begin{cases}\overline{C_1}\cos 0+\overline{C_2}\sin 0-\cos 0\ln\left(\sec 0+\operatorname{tg}0\right)=0;\\ \overline{C_1}\cos\frac{\pi}{6}+\overline{C_2}\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\ln\left(\sec\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{C_1}=0;\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{C_1}+\frac{1}{2}\overline{C_2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0.\end{cases}$$

Звідси $\overline{C_1}=0$; $\overline{C_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3$.

Таким чином, частинний розв'язок рівняння приймає вигляд

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3\sin x-\cos x\ln\left(\sec x+\operatorname{tg}x\right).$$

Завдання для аудиторної роботи

Розв'язати рівняння:

1. $y''-y'=x^2-1$.

2. $y''+2y'+y=2e^x$.

3. $y''+y=xe^x$, $y(0)=y'(0)=1$.

4. $y''+6y'+5y=2\cos x$.

5. $y''+y'=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

6. $y''-2y'+y=3e^x+2x+3$, $y(0)=3$, $y'(0)=-1$.

7. $y''-2y'-3y=(x+2)e^{3x}$.

8. $y''+4y=5\sin 2x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Домашнє завдання

1. $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$; $\boxed{y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{64}\left(24x^2 + 52x + 41\right)}$.

2. $y'' + y = \cos 3x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $\boxed{y = -\frac{11}{8}\cos x + 4\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x}$.

3. $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$; $\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{144}(1 - 12x)e^{-2x}}$.

4. $y'' + 4y = \sin 2x + 1$, $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$; $\boxed{y = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}(x\cos 2x - 1)}$.

5. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$; $\boxed{y = \frac{1}{8}\left(e^{5x} + 22e^{3x} + e^{x}\right)}$.

6. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$; $\boxed{y = e^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) - \frac{1}{2}xe^x \cos x}$.

7. $4y'' + 8y' = x\sin x$; $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \left(\frac{x}{20} - \frac{7}{50}\right)\sin x - \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right)\cos x}$.

8. $y'' + 4y = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; $\boxed{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}(1 + x\sin 2x)}$.

9. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$; $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + 3x^2 + 2x}$.

ЧАСТИНА ДРУГА

3. ЗАПИТАННЯ ДО МОДУЛЯ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

§ 3.1. Диференціальні рівняння першого порядку. Теоретичні питання

1. Рівняння є диференціальнім , якщо воно містить:

   1) змінні x і y у першому ступені;

   2) зміну x, функцію y та її похідні;

   3) зміну x та інтеграл від функції $y(x)$;

   4) змінні x, y у другому ступеню.

2. Порядок диференціального рівняння визначається:

   1) найвищою похідною функції, що входить у це рівняння;

2) найвищім ступенем змінної x;

3) найвищім ступенем змінної y;

4) кількістю доданків рівняння.

3. Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

1) $y'' = f(x, y, y')$;

2) $y^{(n)} = f(x)$;

3) $F(x, y, y') = 0$;

4) $F(x, y) = 0$.

4. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається:

1) функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу $\boldsymbol{x}$, довільної сталої C і яка перетворює дане рівняння в тотожність;

2) функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює дане рівняння в тотожність;

3) функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка залежить від змінної x, довільних сталих C_1, C_2 і обертає дане рівняння в тотожність;

5. Частинний розв'язок диференціального рівняння першого порядку:

1) функція, яку отримують, підставляючи задані значення x_0, y_0 у рівняння;

2) функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу x, довільної сталої C і яка перетворює дане рівняння в тотожність;

3) функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка залежить від змінної x, довільних сталих C_1, C_2 і обертає дане рівняння в тотожність;

4) функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$, коли значення сталої $C = C_0$.

6. Задачею Коші, або задачею з початковими умовами, для диференціального рівняння n-го порядку називається:

1) знаходження загального розв'язку рівняння;

2) знаходження частинного розв'язку із загального при значенні $C_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

3) знаходження частинного розв'язку із загального при значенні $x = 0$;

4) задача відшукання розв'язку $y(x)$ цього рівняння, яке задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

7. Геометрично задача Коші для диференціального рівняння першого порядку полягає в тому, що:

1) треба знайти єдину інтегральну криву, яка проходить через точку $(x_0;y_0)$ координатної площини Oxy;

2) треба знайти множину інтегральних кривих, які відповідають загальному розв'язку рівняння;

3) треба побудувати графік функції $y' = f(x)$;

4) побудувати графік параболи $y = x^2$.

8. Диференціальним рівнянням з відокремленими змінними називається:

1) диференціальне рівняння першого порядку вигляду $N(x)dx + M(y)dy = 0$;

2) диференціальне рівняння першого порядку вигляду $y' = N(x) + M(y)$;

3) диференціальне рівняння вигляду $N(y)dx = M(x)dy$;

4) диференціальне рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x) \quad (n \geq 2)$.

9. Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними це:

1) диференціальне рівняння вигляду $y'' = f\left(\frac{y}{x}\right)$;

2) диференціальне рівняння першого порядку, яке має вигляд $y'(x) = P(x) \cdot Q(y)$;

3) диференціальне рівняння першого порядку $y' = P(x) + Q(y)$;

4) диференціальне рівняння другого порядку, яке містить добутки множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної $y'' = P(x) \cdot Q(y)$.

10. Для знаходження загального інтеграла (розв'язку) диференціального рівняння $Q(y)dy = P(x)dx$ потрібно:

1) проінтегрувати цю рівність;

2) знайти похідну y' із цієї рівності;

3) знайти значення x із цього рівняння.

11. Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називається:

1) диференціальне рівняння вигляду $y' + p(x)y = q(x)$;

2) рівняння, яке можна звести до вигляду $y' = f(x + y)$;

3) рівняння, яке можна звести до вигляду $y' = f\left(x^2 + y^2\right)$;

4) рівняння, яке можна звести до вигляду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

12. Однорідне диференціальне рівняння першого порядку розв'язують:

1) шляхом підстановки $y = u \cdot x$;

2) шляхом підстановки $y = u \cdot v$;

3) шляхом заміни $y' = p(x)$;

4) шляхом заміни $y' = x + u(x)$.

13. Диференціальне рівняння вигляду $y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ можливо перетворити до:

1) рівняння з відокремлюваними змінними;

2) лінійного рівняння першого порядку;

3) однорідного рівняння першого порядку;

4) рівняння Бернуллі.

14. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду:

1) $y' + p(x)y = f(x)$;

2) $y'' + py' + qy = y^n, \quad (n \geq 2)$;

3) $y' + p(x)y = f(x)y^n, \quad (n \neq 0; n \neq 1)$;

4) $y' + py^2 = q$.

15. Розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку шукають у вигляді:

1) $y = u(x) + v(x)$;

2) $y' = p(x)$;

3) $y = u(x) \cdot v(x)$;

4) $y = \frac{u(x)}{v(x)}$.

16. Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду:

1) $y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$;

2) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$;

3) $y' + p(x)y = q(x)y^n$, $(n \neq 0; n \neq 1)$;

4) $y' + p(x)y = q(x)$.

17. Розв'язок рівняння Бернуллі шукають у вигляді:

1) $y' = p(x)$;

2) $y = u(x) \cdot v(x)$;

3) $y = u(x) + v(x)$;

4) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

18. Геометрично загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку це:

1) множина інтегральних кривих;

2) лінія $y = \varphi(x)$;

3) множина парабол;

4) множина прямих.

19. Початкові умови для знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння першого порядку це:

1) значення $x = 0$;

2) лінійна функція $y = kx$;

3) точка з координатами $(x_0; y_0)$;

4) значення $y = 0$;

5) парабола $y = x^2$.

20. Задача Коші (задача з початковими умовами) для диференціального рівняння першого порядку це:

1) знаходження частинного розв'язку при значенні $x = 0$;

2) знаходження частинного розв'язку, який задовольняє початкову умову $y(x = x_0) = y_0$;

3) знаходження із загального розв'язку значення x при $y = 0$.

21. Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називають:

1) функцію $y = \varphi(x, C)$, яка обертає дане рівняння в тотожність;

2) функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, яка залежить від змінної x, n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і обертає рівняння в тотожність;

3) функція $y = \varphi(x)$, яка обертає рівняння в тотожність.

§ 3.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Практика

Знайти загальний, а де задані початкові умови, то й частинний розв'язок рівняння:

1. $\left(x^2+4\right)y' = \cos^2 y$.
2. $\sqrt{x^2-1}y' = y; \quad y(1) = 1$.
3. $ydx + \operatorname{ctg} xdy = 0$.
4. $yy' + x = 1$.
5. $y' - \dfrac{x-1}{y+2} = 0; \quad y(0) = 0$.
6. $y^2dx + (x-2)dy = 0$.
7. $xydx = \left(1+x^2\right)dy$.
8. $x^2dy + xdx = -dx; \quad y(1) = 1$.
9. $1 + y^2 - \sqrt{x}y' = 0$.
10. $1 + y - (1-x)y' = 0$.
11. $y^2dx - e^xdy = 0; \quad y(0) = 1$.
12. $y^2 + x^2y' = 0; \quad y(-1) = 1$.
13. $y' - \sqrt{xy} = 0; \quad y(0) = 0$.
14. $\left(1+x^2\right)dy - dx = 0$.
15. $1 = 2xy' - x^2; \quad y(1) = \dfrac{1}{4}$.
16. $y = xy' - 1 - y'$.
17. $xy' = 2y' + 1; \quad y(3) = 1$.
18. $\cos^2 xdy - dx = 0$.
19. $\sin^2 xdy + dx = 0$.
20. $\left(x^2+1\right)y' + \sin^2 y = 0$.
21. $y' - e^{-y}\cos x = 0; \quad y(0) = 0$.
22. $\left(1+x^3\right)y' = 3x^2y$.
23. $\cos xdy + y\sin xdx = 0$.
24. $\dfrac{1+x^2}{y}y' - 2x = 0; \quad y(0) = 1$.
25. $y' + y^2\sin x = 0$.
26. $y'\operatorname{tg} x = y$.
27. $2(xdx + ydy) = e^xdx$.
28. $ydx - xdy = dx + dy; \quad y(0) = 2$.
29. $e^{y-x}y' - 1 = 0; \quad y(0) = 0$.
30. $3\left(y^2dy + x^2dx\right) - dx = 0$.
31. $x^2y' - y^2 = 1 - y'; \quad y(1) = 1$.
32. $y' - y\operatorname{ctg} x = 0; \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
33. $y' = \dfrac{x+y}{2x}; \quad y(1) = 2$.
34. $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right); \quad y(1) = e$.
35. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x; \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.
36. $xy' + y = x^3; \quad y(1) = 2{,}25$.

37. $xy' + y - \sin 2x = 0; \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

38. $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2; \quad y(-1) = 2$.

39. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x; \quad y(e) = \frac{e^2}{2}$.

40. $xy' - y + y^3 = 0; \quad y(1) = 2$.

41. $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}; \quad y(0) = -1$.

42. $xyy' = y^2 + 2x^2; \quad y(1) = 2$.

43. $y' + \frac{x-y}{x} = 0; \quad y(1) = \ln 2$.

44. $y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}; \quad y(1) = -\frac{1}{\ln 4}$.

45. $y' = \frac{y}{x} + \sin^2 \frac{y}{x}$.

46. $y' - \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

47. $y' + 2y - xe^{-2x} = 0; \quad y(0) = -1$.

48. $y' - y - 4e^{2-x} = 0; \quad y(0) = 4$.

49. $y' - 2xy = xe^{x^2}; \quad y(0) = -1$.

50. $xy' + 2x^2 y = \frac{2}{x}e^{-x^2}; \quad y(2) = -e^{-4}$.

51. $y' - 2y = (2x+1)e^{2x}; \quad y(0) = 0$.

52. $y' + y - 3x^2 e^{-x} = 0; \quad y(0) = 2$.

§ 3.3. Диференціальні рівняння другого порядку. Теоретичні питання

1. Лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд:

1) $y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_2(x)y = f(x)$;

2) $y'' + \alpha_1(x)y' = f(x)y^2$;

3) $y' + \alpha_1(x)y^2 = f(x)$;

4) $y'' \cdot y = f(x)$.

2. Загальним розв'язком лінійного диференціального рівняння другого порядку є функція:

1) $y = f(x)$, яка обертає рівняння в тотожність;

2) $y = f(x, C)$, яка має змінну $\boldsymbol{x}$, сталу C і обертає рівняння в тотожність;

3) $y = f(x, C_1, C_2)$, яка має змінну $\boldsymbol{x}$, сталі C_1, C_2 і обертає рівняння в тотожність;

4) $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, яка має змінну x, сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ і задовольняє рівняння.

3. Диференціальне рівняння другого порядку називається лінійним однорідним рівнянням, якщо має вигляд:

1) $y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = 0$;

2) $y'' + \alpha_1(x) y^2 = 0$;

3) $y'' + \alpha_1(x) y' + \alpha_0(x) y = f(x)$;

4) $y'' + \alpha_1(x) y' = \alpha_0(x) y^2$, де $f(x), \alpha_1(x), \alpha_0(x)$ – задані неперервні функції.

4. Диференціальне рівняння другого порядку називається лінійним неоднорідним рівнянням, якщо має вигляд:

1) $y'' + \alpha_1(x) y' = \alpha_2(x) y^2$;

2) $(y'')^2 + \alpha_1(x) y' = f(x) y^2$;

3) $y'' + \alpha_1(x) y' + \alpha_2(x) y = f(x)$;

4) $y'' + \alpha_1(x) y^2 = f(x)$.

5. Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y'' + \alpha_1(x) y' + \alpha_0(x) y = 0$ має вигляд:

1) $y = C y_1(x) \cdot y_2(x)$;

2) $y = y_1(x) + y_2(x)$;

3) $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$;

4) $y = C_1 \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$.

6. Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються лінійно залежними на проміжку $[a;b]$, якщо їх відношення $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ для $x \in [a;b]$ дорівнює:

1) сталому числу λ;

2) змінній x;

3) функції $f(x)$;

4) значенню x^2.

7. Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються лінійно незалежними на проміжку $[a;b]$, якщо:

1) добуток цих функцій є стале число;

2) відношення цих функцій не дорівнює сталій величині;

3) сума цих функцій є стала величина;

4) відношення цих функцій стала величина.

8. Характеристичне рівняння однорідного лінійного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$ (p, q — дійсні числа) має вигляд:

1) $k^2 + pk + q = 0$;

2) $k^2 + qk = 0$;

3) $k^2+q=0$;

4) $pk+q=0$.

9. Якщо корені k_1 і k_2 характеристичного рівняння дійсні і різні $(D>0)$, то загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

1) $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$;

2) $y=C_1\left(e^{k_1x}+xe^{k_2x}\right)$;

3) $y=e^{k_1x}\cos x+e^{k_2x}\sin x$;

4) $y=C_1e^{k_1x}\cos x+C_2e^{k_2x}\sin x$.

10. Коли корені характеристичного рівняння рівні $(k_1=k_2)$, то загальний розв'язок рівняння $y''+py'+qy=0$ має вигляд:

1) $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$;

2) $y=C_1e^{k_1x}(\cos x+\sin x)$;

3) $y=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$;

4) $y=C_1e^{k_1x}\cos x+C_2e^{k_2x}\sin x$.

11. Якщо характеристичне рівняння $k^2+pk+q=0$ однорідного диференціального рівняння має комплексні спряжені корені $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то загальний розв'язок цього рівняння:

1) $y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$;

2) $y=e^{\alpha x}\cos\beta x+e^{\alpha x}\sin\beta x$;

3) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;

4) $y=C_1C_2e^{\alpha x}\cos\beta x\sin\beta x$.

12. Загальним розв'язком рівняння $y''+\alpha_1(x)y'+\alpha_2(x)y=f(x)$, де $f(x),\alpha_1(x),\alpha_2(x)$ — відомі неперервні функції, $\overline{y}(x)$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, y^* — частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, C_1,C_2 — довільні сталі, є вираз:

1) $\overline{y}\cdot y^*$;

2) $\dfrac{\overline{y}}{y^*}$;

3) $\overline{y}+y^*$;

4) $C_1\overline{y}+C_2y^*$.

13. Якщо права частина неоднорідного рівняння $y''+py'+qy=f(x)$ (p, q — задані дійсні числа) є функція $f(x)=P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, то частинний розв'язок цього рівняння шукають у вигляді:

1) $y^*=b_1x+b_0$;

2) $y^* = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$;

3) $y^* = \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n\right) x^r$;

4) $y^* = bx^n$.

14. Якщо права частина неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ є функція $f(x) = P_n(x)e^{mx} = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right)e^{mx}$, то частинний розв'язок цього рівняння шукають у вигляді:

1) $y^* = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$;

2) $y^* = \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n\right) e^{mx} x^r$;

3) $y^* = be^{mx} x^r$;

4) $y^* = (Ax + B)e^{mx} x^r$.

15. Частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = A\cos nx + B\sin nx$ (p, q, A, B, n — дійсні числа) має вигляд:

1) $y^* = (M\cos nx + N\sin nx)x^r$;

2) $y^* = N\operatorname{tg} nx \cdot x^r$;

3) $y^* = M\cos nx \cdot x^r$;

4) $y^* = M\cos nx + N\sin nx$.

16. Згідно з методом варіації довільних сталих загальний розв'язок y неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ шукають у вигляді ($y_1(x), y_2(x)$ — частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння):

1) $y = y_1 \cdot y_2$;

2) $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$;

3) $y = \dfrac{C_1 y_1}{C_2 y_2}$.

17. Згідно з методом варіації довільних сталих загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ має вигляд $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, де y_1 і y_2:

1) частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння;

2) частинні розв'язки заданого неоднорідного рівняння;

3) лінійно незалежні функції;

4) задовольняють умову $y_1 + y_2 = f(x)$.

18. Згідно з методом варіації довільних сталих загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ має вигляд $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, де значення $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знаходять із системи рівнянь:

1) $\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x); \end{cases}$

2) $\begin{cases} C_1 y_1' + C_2 y_2' = 0, \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' = f(x); \end{cases}$

3) $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$

19. Згідно з методом невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = (Ax + B)e^{mx}$ шукають у вигляді:

1) $y^* = Mxe^{mx} \cdot x^r$;

2) $y^* = Ne^{mx} \cdot x^r$;

3) $y^* = (Mx + N)e^{mx} \cdot x^r$;

4) $y^* = Mx + N$.

20. Згідно методу невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{mx}$ має вигляд $y^* = \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n\right)e^{mx} \cdot x^r$, де значення r дорівнює:

1) $r = 0$;

2) $r = 1$;

3) $r = 2$;

4) $r = \begin{cases} 2, & \text{коли } m = k_1 = k_2 \\ 1, & \text{коли } k_1 \neq k_2, \text{але } m = k_1 \text{ або } m = k_2 \\ 0, & \text{для усіх інших значень} \end{cases}$

§ 3.4. Диференціальні рівняння другого порядку. Практика

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння. До відповіді занести номер правильного розв'язку:

1. $y'' + 2y' + 5y = 0$.
2. $y'' + 4y' = 0$.
3. $y'' - 4y = 0$.
4. $2y'' - 5y' + y = 0$.
5. $y'' - 9y = 0$.
6. $y'' + 4y' + 5y = 0$.
7. $3y'' - 4y' + y = 0$.
8. $4y'' - 9y = 0$.
9. $y'' - 4y' + 13y = 0$.
10. $3y'' + 4y' + y = 0$.
11. $y'' - 25y = 0$.
12. $y'' - 4y' + 29y = 0$.

13. $2y'' + 3y' + y = 0$.

14. $y'' - 16y = 0$.

15. $y'' + 2y' + y = 0$.

16. $y'' - 9y' + 20y = 0$.

17. $y'' - 6y' + 13y = 0$.

18. $y'' + 4y = 0$.

19. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

20. $4y'' - 9y = 0$.

21. $y'' - 6y' + 10y = 0$.

22. $2y'' - y' = 0$.

23. $4y'' + y = 0$.

24. $y'' - 8y' + 25y = 0$.

25. $y'' + y = 0$.

26. $y'' - 81y = 0$.

27. $y'' - 8y' + 16y = 0$.

28. $y'' - 14y' + 45 = 0$.

29. $9y'' - 16y = 0$.

30. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

31. $y'' - 3y' = 26\cos 2x$.

32. $y'' - 4y = 6xe^{x}$.

33. $y'' + y = 4x^2 + 1$.

34. $y'' + 2y' + y = x - 1$.

35. $y'' + 4y = 12e^{2x}$.

36. $y'' - y' = 2x + 3$.

37. $y'' - 2y' + 5y = 8e^{x}$.

38. $y'' - y' - 2y = 10\sin x$.

39. $y'' - y' + y = (3x + 2)e^{x}$.

40. $y'' + 2y' = 5e^{-2x}$.

41. $4y'' - y = 6\cos\frac{x}{2}$.

42. $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6x$.

43. $2y'' - 3y' + y = 3e^{x}$.

44. $4y'' + y = (5x + 2)e^{-x}$.

45. $y'' - y' = 3\sin x$.

46. $y'' - 2y' + y = 10e^{x}$.

47. $y'' + y' - 2y = 4\left(x^2 - 1\right)$.

48. $y'' + 4y' = 20\cos 2x$.

49. $y'' + y' = (x - 3)e^{-x}$.

50. $y'' - y = 3e^{-x}$.

Бібліографічний список

1. А. К. Боярчук, Г. П. Головач Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. —М.: Эдиториал УРСС. — т. 5, 2001. — 384 с.
2. К. К. Понамарев Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач / Пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов. —М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1962. — 184 с.
3. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон Теория обыкновенных дифференциальных

уравнений. —М.: ИЛ, 1958. — 475 с.

4. И. Г. Петровский Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. —М.: Изд-во МГУ, 1984. — 294 с.
5. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов Качественная теория дифференциальных уравнений. —М.: ОГИЗ, 1947. — 448 с.
6. Э. Л. Айнс Обыкновенные дифференциальные уравнения. —Харьков: ОНТИ, 1939. — 719 с.
7. Л. С. Понтрягин Обыкновенные дифференциальные уравнения. —М.: Наука, 1974. — 331 с.
8. В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко Обыкновенные дифференциальные уравнения. —М.: т. 1, 1985. — 149 с.

ЗМІСТ

Частина друга

Навчальне видання

Бредіхів Юрій Радіонович
Русу Сергій Павлович

Модульне навчання

Диференціальні рівняння

Методичні вказівки для виконання модульної роботи № 7

Редактор *Т. В. Мацкевич*

Комп'ютерна верстка *Т. В. Шевченко*

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. ___. Обл.-вид. арк. ___.
Тираж 300 пр. Зам. № ___.

Видавництво Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Свідоцтво суб'єкта видавничої діяльності ДК № 1315 від 31.03.2003

Адреса видавництва та дільниці оперативної поліграфії:
49010, Дніпропетровськ, вул. Лазаряна, 2; www.diitrvv.dp.ua