МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Кафедра «Вища математика»

Р Я Д И

Модульне навчання

Методичні вказівки до виконання модульної роботи № 8
«Ряди та їх застосування»

Укладачі: Є. А. Макаренков
Н. Г. Наріус
Г. А. Папанов
В. І. Самарський

Для студентів II курсу усіх спеціальностей

Дніпропетровськ 2010

УДК 517.538 (075.8)

Укладачі:
Є. А. Макаренков, Н. Г. Наріус,
Г. А. Папанов, В. І. Самарський

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *П. І. Когут (ДНУ)*
канд. фіз.-мат. наук, доц. *Т. Ф. Михайлова (ДІІТ)*

Ряди: Модульне навчання [Текст]: методичні вказівки до виконання модульної роботи № 8 «Ряди та їх застосування» / уклад.: Є. А. Макаренков, Н. Г. Наріус, Г. А. Папанов, В. І. Самарський; Дніпропетр. нац. ун-т залізнич. трансп. імені академіка В. Лазаряна. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2010. – 46 с.

Методичні вказівки призначені для студентів другого курсу усіх спеціальностей. Вони містять основний теоретичний матеріал розділу, велику кількість розв'язаних прикладів, тридцять варіантів індивідуальних домашніх завдань, а також приклади тестових завдань з наведеними відповідями.

Бібліогр.: 5 найм.

ВСТУП

Запропоновані методичні вказівки під час застосування модульної системи навчання є модулем навчання № 8, тобто одним із системи модулів, в яких закладені основні розділи з дисципліни «Вища математика». Ці розділи (модулі) об'єднані за змістом із врахуванням відведених кредитів на вивчення усього курсу з вищої математики:

МК-1	Векторна і лінійна алгебра.
МК-2	Аналітична геометрія.
МК-3	Функції, границя, неперервність функцій.
МК-4	Диференціальне числення.
МК-5	Невизначений інтеграл.
МК-6	Визначений інтеграл.
МК-7	Звичайні диференціальні рівняння.
МК-8	Ряди.

Із метою контролю вивчення та опанування основ вищої математики кожен модуль є заліковим із обов'язковим оцінюванням якості засвоєння матеріалу студентами згідно з прийнятої в університеті бальною системою.

Засобами діагностики успішності навчання є комплекти індивідуальних та тестових завдань для складання контрольних заходів (залік, модульний контроль, іспит).

1. ЧИСЛОВИЙ РЯД. ЗБІЖНІСТЬ РЯДУ. СУМА РЯДУ

Якщо кожному (натуральному) числу поставити у відповідність певну величину, то множина цих величин утворить послідовність. Послідовність буде числовою, якщо складатиметься з чисел.

Наприклад: 1, 2, 3,…, n,…;   1, 1/2,1/4,…, $1/n$, …

Означення. Числовим рядом називається вираз, який містить нескінченне число доданків:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n \to 1}^{\infty} u_n .$$

Ряд називається заданим, якщо відомий його загальний член u_n як функція його номера $n \Rightarrow u_n = f(n)$.

Наприклад, $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...,\quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$;

$$2 + 6 + 18 + ... + 2 \cdot 3^{n-1} + ...,\ u_n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Числові ряди можуть мати як дійсні, так і комплексні члени. Числові ряди можуть бути знаковизначеними і знаконевизначеними, з додатними членами, знакозмінними, знакопереміжними, з комплексними членами.

Для того, щоб дати стандартне означення збіжності або розбіжності ряду, введемо поняття частинних (зрізаних) сум. Введемо суми: $s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2$,

$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$, …, $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$. Їх називають ч**астинними** (зрізаними).

Для числових рядів $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Означення. Якщо послідовність зрізаних сум

$$s_1, s_2, ..., s_n, ... \quad (1)$$

має скінченну границю $\lim_{n \to \infty} s_n = s$, то ряд називається **збіжним**, а s називається його сумою. Якщо ж послідовність (1) не має границі або вона дорівнює нескінченності, то ряд називається **розбіжним**.

2. ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЗБІЖНІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНОГО РЯДУ

Розглянемо геометричну прогресію $\{a \cdot q^n\}$ з нескінченною кількістю членів, першим членом $a \neq 0$ і знаменником q.

Запишемо ряд, який називається **геометричним**

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + ... + a \cdot q^n + ... \quad (2)$$

Дослідимо ряд (2). Для цього побудуємо зрізану суму $s_n = a\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Знайдемо границю s_n.

1. Нехай $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \dfrac{a}{1 - q} = s$, отже, ряд (2) збіжний.

2. Нехай $|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \infty$, отже, ряд (2) розбіжний.

3. Нехай $|q| = 1 \Rightarrow a + a + a + ...$; $s_n = na$; $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} na = \infty$, тобто ряд (2) розбіжний.

4. Нехай $|q| = -1 \Rightarrow a - a, + a - ...$; $s_{2n} = 0$; $s_{2n-1} = a$; $\lim_{n \to \infty} s_{2n} = 0$; $\lim_{n \to \infty} s_{2n-1} = a$, отже, послідовність s_n не має границі і ряд (2) розбіжний.

Теорема. Геометричний ряд збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

3. НАЙПРОСТІШІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Теорема 1 (про множення рядів). Коли члени збіжного числового ряду помножити на число, то утворений ряд буде також збіжним.

Теорема 2 (про додавання рядів). Якщо два числових ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються, то буде збігатися ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$.

Теорема 3 (про відкидання скінченного числа членів ряду). Відкидання скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність.

4. НЕОБХІДНА УМОВА ЗБІЖНОСТІ

Теорема. Якщо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то границя загального члена дорівнює нулю.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Приклад. Перевірити виконання необхідної умови збіжності для таких рядів

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; 2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Розв'язання

1. Запишемо загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n}$ (заданий ряд називається гармонічним), і знайдемо його границю $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, тобто необхідна умова збіжності виконується.

2. Зробимо ті ж самі дії, що і в першому випадку

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{100n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{100+1/n} = \frac{1}{100}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то за наслідком ряд розбіжний.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{\infty} = 0$, необхідна ознака збіжності виконується.

Треба додати, що існують розбіжні числові ряди, для яких виконується необхідна ознака збіжності.

ЗАВДАННЯ ТА ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називають числовою послідовністю?
2. Який вираз називається числовим рядом?
3. Якими можуть бути числові ряди?
4. Що таке частинна (зрізана) сума?
5. Сформулюйте означення збіжності числового ряду.
6. За яких умов збігається геометричний ряд?
7. Які існують найпростіші властивості числових рядів?
8. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності.
9. За яких умов числовий ряд розбігається?

5. ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ З НЕВІД'ЄМНИМИ ЧЛЕНАМИ

Перша ознака порівняння. Нехай дани два ряди з невід'ємними членами:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad u_n \geq 0; \qquad (3)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \quad v_n \geq 0. \qquad (4)$$

Коли $u_n \leq v_n$ для всіх n і ряд (4) збігається, то буде збігатися і ряд (3).

Друга ознака порівняння. Нехай дани ряди (3) і (4). Коли $u_n \geq v_n$ для всіх n, і ряд (4) розбігається, то буде розбігатися і ряд (3).

На практиці зручно користуватися таким наслідком ознак порівняння рядів:

Коли $u_n > 0$, $v_n > 0$ і існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, де h – число відмінне від нуля, тоді ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ведуть себе однаково відносно збіжності.

Ознака Д'Аламбера. Розглянемо цю ознаку для числового ряду з додатними членами:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad u_n > 0.$$

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то коли:

– $\rho < 1$ – ряд збігається;
– $\rho > 1$ – ряд розбігається;
– $\rho = 1$ – ряд може збігатися або розбігатися.

Ознака Коші з коренем (радікальна ознака Коші)

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ з додатними членами $a_n > 0$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то якщо

– $\rho < 1$ – ряд збігається;
– $\rho > 1$ – ряд розбігається;
– $\rho = 1$ – визначити збіжність ряду за ознакою неможливо.

Інтегральна ознака Коші збіжності рядів

Розглянемо числовий ряд із додатними членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$.

Теорема. Нехай члени ряду задовольняють такі умови:

1) утворюють монотонну незростаючу послідовність

$$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots;$$

2) можна побудувати монотонну незростаючу функцію $y = y(x)$ таку, що $y(0) = u_0$; $y(1) = u_1$; …; $y(n) = u_n$;…;

3) інтеграл $\int_1^{\infty} y(x)dx$ збігається, тоді заданий ряд також збігається. Якщо інтеграл розбігається, то й ряд розбігається.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які достатні ознаки збіжності числових рядів ви знаєте?
2. Чим відрізняються перша від другої ознаки порівняння?
3. Як формулюється ознака Д'Аламбера? Для яких числових рядів її краще використовувати?
4. Як формулюється ознака Коші з коренем?
5. Який інтеграл використовується в інтегральній ознаці Коші?
6. Як формулюється наслідок ознак порівняння рядів?

Приклад. Дослідити на збіжність за допомогою достатніх ознак збіжності такі ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, p>1$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

Розв'язання

1. Скористаємося першою ознакою порівняння. Нехай $u_n=\frac{1}{n\cdot 3^n}$, тоді $v_n=\frac{1}{3^n}$ – загальний член геометричного ряду, у якого $q=\frac{1}{3}$ і він збігається; $\frac{1}{n\cdot 3^n}\le\frac{1}{3^n}$, тоді ряд, що досліджується, теж збігається.

2. Використовуючи першу ознаку порівняння, розглянемо ряд із загальним членом $v_n=\frac{\pi}{2^n}$. Можна помітити, що $\sin\frac{\pi}{2^n}\le\frac{\pi}{2^n}$. Але ряд із загальним членом $\frac{\pi}{2^n}$ є збіжним, як і ряд геометричної прогресії, а тому й ряд із загальним членом $u_n=\sin\frac{\pi}{2^n}$ збігається.

3. Скористаємося ознакою Д'Аламбера. Нехай $u_n=\frac{2n-1}{3^n}$, $u_{n+1}=\frac{2n+1}{3^{n+1}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot\cancel{3^n}}{(2n-1)\cdot 3^{\cancel{n+1}}}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{3}<1$, тобто за ознакою Д'Аламбера ряд збігається.

4. Використаємо другу ознаку порівняння. Нехай $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$ – це загальний член досліджуємого ряду, а $v_n = \dfrac{1}{n}$ – загальний член ряду, який розбігається. Маємо нерівність $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$, тобто ряд, що досліджується, розбігається за другою ознакою порівняння.

5. Скористаємося ознакою Д'Аламбера

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{n!};$$

$$u_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{\cancel{n}}\,!\cdot\cancel{n}!}{\cancel{2^{n-1}}\,!\,\cancel{n}!(n+1)} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{2}{\infty} = 0 < 1,$$

тобто за ознакою Д'Аламбера ряд збігається.

6. Скористаємося радикальною ознакою Коші. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$ збігається тому, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{5}{n^2}} = \dfrac{2}{3} < 1$.

7. Цей ряд має назву **ряду Діріхле** або **узагальнено гармонічний** ряд.

Перепишимо ряд у формі $1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\ldots+\dfrac{1}{n^p}+\ldots,\ p>1$. Члени ряду утворюють монотонну послідовність $1>\dfrac{1}{2^p}>\dfrac{1}{3^p}>\ldots>\dfrac{1}{n^p}>\ldots$ Отже, скориставшись інтегральною ознакою Коші, будемо мати

$$y(x) = \frac{1}{x^p} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b x^{-p}dp = \lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = \lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = \begin{cases} 0, & p>1; \\ \infty, & p<1. \end{cases}$$

Тоді $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^p} = \begin{cases} 0, & p>1; \\ \infty, & p<1. \end{cases}$

Якщо $p=1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонічний ряд, який розбігається теж за інтегральною ознакою Коші (доведення не приводимо).

Ряд Діріхле слід використовувати для ознак порівняння.

8. Використаємо для дослідження на збіжність інтегральну ознаку Коші.

$$y=\frac{1}{1+x^2},$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}<1,$$

тобто ряд збігається.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Користуючись необхідною і достатніми ознаками збіжності з'ясувати, чи збігаються наведені числові ряди з додатними членами

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n\cdot n!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

Відповіді: 1), 4), 10), 11), 12) – розбігається;
2), 3), 5), 6), 7), 8), 9) – збігається;

6. ОЗНАКА ЛЕЙБНІЦА ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОПЕРЕМІЖНИХ РЯДІВ

Розглянемо знакопереміжний ряд $u_0-u_1+u_2-u_3+\ldots+u_{2n-2}-u_{2n-1}+$ $+u_{2n}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$; $u_n>0$.

Ознака Лейбніца (достатня ознака збіжності). Якщо $u_0,u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots$ є незростаючою послідовністю:

$$u_0\ge u_1\ge u_2\ge\ldots\ge u_n\ge\ldots \ \text{ і } \ \lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

то 1) знакопереміжний ряд збігається (умовно);

2) сума ряду не перевищує абсолютної величини першого члена ряду

$$s=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n u_n\le u_0;$$

3) сума залишку ряду не перевищує абсолютної величини першого члена залишку: $r_n\le u_{n+1}$; $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(-1\right)^k u_k$ і має знак свого першого члена.

7. АБСОЛЮТНА І УМОВНА ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ

Візьмемо який-небудь знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ..., \qquad (5)$$

тобто ряд с членами довільних знаків. Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин ряду (5):

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... \qquad (6)$$

Теорема. Коли ряд (6) збігається, тоді збігається і ряд (5).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно збігається, коли збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Для знакосталих рядів поняття збіжності та абсолютної збіжності співпадають.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбігається.

ЗАВДАННЯ ТА ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Дати означення знакозмінних та знакопереміжних рядів.
2. Який ряд називається умовно збіжним?
3. Сформулюйте ознаку Лейбніца.
4. Який ряд називається абсолютно збіжним?
5. Які поняття співпадають для знакосталих рядів?

Приклад. Дослідити на збіжність ряди:

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + ...;$ 2) $\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} + ...;$

3) $2 - \frac{3}{2} + ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} + ...;$ 4) $\frac{3}{2} - \frac{3^2}{7} + ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{3^n}{5n-3} + ...;$

5) $1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} + ...$

Розв'язання

1. Маємо знакопереміжний ряд із загальним членом $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$. За ознакою Лейбніца маємо $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > ...,$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, тобто ряд збігається за Лейбніцем.

Далі будемо досліджувати ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|$. Скористаємося інтегральною ознакою Коші:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \left(\ln|x| \Big|_1^b \right) = \infty,$$

тобто невласни й інтеграл розбігається і розбігається ряд з додатними членами.

Висновок: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ збігається умовно.

2. Загальний член $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$. За ознакою Лейбніца маємо $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\ldots$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)!}=0$, тобто ряд збігається за Лейбніцем.

Тепер розглянемо ряд із додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(2n-1)!}\right|$.

Дослідимо його за допомогою ознаки Д'Аламбера:

$$u_n=\frac{1}{(2n-1)!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{(2n-1)!}}{\cancel{(2n-1)!}(2n)(2n+1)}=\frac{1}{\infty}=0<1.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд з додатними членами збігається, а знакопереміжний ряд збігається абсолютно.

3. Загальний член знакопереміжного ряду має вигляд

$$u_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Дослідимо його за допомогою ознаки Лейбніца

$$2>\frac{3}{2}>\frac{4}{3}>\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\neq 0,$$

тобто ознака Лейбніца не виконується і ряд розбігається.

4. Маємо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3^n}{5n-3}$.

Дослідимо його за допомогою ознаки Лейбніца

$$\frac{3}{2}>\frac{3^2}{7}<\frac{3^3}{12}<\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{5n-3}=\infty.$$

Відомо, що коли хоча б одна з умов ознаки Лейбніца не виконується, то ряд розбігається. У нашому випадку не виконуються обидві умови.

5. Маємо знакопереміжний ряд із загальним членом $u_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Перевіряємо виконання умов ознаки Лейбніца:

$$1>\frac{1}{2\sqrt{2}}>\frac{1}{3\sqrt{3}}>\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=0,$$

тобто ряд збігається за Лейбніцем.

Розглянемо ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n\sqrt{n}}\right|.$$

Дослідимо його за допомогою інтегральної ознаки Коші

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{3}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\left.-\frac{2}{\sqrt{x}}\right|_1^b\right)=2,$$

тобто невласний інтеграл збігається і збігається ряд з додатними членами.

Висновок: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$ збігається абсолютно.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Дослідити на збіжність ряди:

1) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots;$

2) $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots;$

3) $\frac{1}{1\cdot 2!}-\frac{1}{3\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n)1}+\ldots;$

4) $\frac{3}{2}-\frac{5}{6}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}+\ldots$

5) $\frac{1}{3}-\frac{1}{5^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)^n}+\ldots;$

6) $1-\frac{9}{25}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{3}{2n+1}\right)^n+\ldots;$

7) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{3n-1}+\ldots;$

8) $\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+2)!}+\ldots$

Відповідь: 1), 2), 4), 5) – збігається умовно;
3), 6), 8) – збігається абсолютно;
7) – розбігається.

8. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Означення 1. Ряд називається функціональним, якщо його члени є функціями залежними від x.

Розглянемо ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{7}$$

Якщо надати змінній x деяке значення x_0, то отримаємо числовий ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+...+u_n(x_0)+... \qquad (8)$$

Якщо ряд (8) збігається, тоді x_0 називається точкою збіжності функціонального ряду.

Означення 2. Сукупність усіх точок збіжності функціонального ряду називається його областю збіжності.

9. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Залежно від типу функції функціональні ряди можуть бути степеневими та тригонометричними.

Якщо для побудови функціонального ряду (7) використано функцію

$$u_n(x)=a_n\cdot x^n, \quad n=\overline{0,\infty},$$

то дістанемо степеневий ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \qquad (9)$$

Якщо твірною функціонального ряду (7) є функція

$$u_n(x)=a_n\cdot(x-x_0)^n, \quad n=\overline{0,\infty},$$

де x_0 – фіксоване значення x, тоді дістанемо більш загальний степеневий ряд

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad (10)$$

де $a_0, a_1, a_2,...$ – сталі числа, які називаються коефіцієнтами ряду.

Множина значень x, яка задовольняє співвідношення $-R<x<R$, називається інтервалом збіжності степеневого ряду (9), число R – радіус збіжності цього ряду.

Інтервалом збіжності ряду (10) є співвідношення

$$x_0-R<x<x_0+R.$$

Радіус збіжності степеневих рядів (9), (10) можна відшукати за допомогою формули

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (11)$$

Якщо $|x|>R$ чи $|x-x_0|>R$ – степеневий ряд розбігається.

Якщо $|x|<R$ чи $|x-x_0|<R$ – степеневий ряд збігається.

Якщо $x=\pm R$, треба провести подальше дослідження ряду.

Треба зазначити, що коли деякі коефіцієнти ряду (9) дорівнюють нулю, то для знаходження радіуса збіжності формулу (11) використати неможливо. У такому випадку можна скористатись ознакою Д'Аламбера.

Припустимо, що заданий ряд (9). Тоді розглянемо наступний ряд:

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+...+|a_nx^n|+... \qquad (12)$$

Застосуємо до ряду (12) ознаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cancel{x^n}\cdot x}{a_n\cancel{x^n}}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Нехай існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\neq 0.$$

Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=|x|\cdot\frac{1}{R}$.

За ознакою Д'Аламбера ряд збігається, якщо $\frac{|x|}{R}<1$, $|x|<R$, $-R<x<R$ – інтервал збіжності.

Зауваження. Викладене має місце для ряду типу $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n$.

Приклад. Відшукати області збіжності рядів:

1) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}+\ldots$;

2) $e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\ldots$;

3) $\frac{2x}{1}-\frac{2^2x^2}{2}+\frac{2^3x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^nx^n}{n}+\ldots$;

4) $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$;

5) $\frac{x-2}{1}+\frac{(x-2)^2}{3}+\ldots+\frac{(x-2)^n}{2n-1}+\ldots$;

6) $\frac{x-6}{3}+\frac{(x-6)^2}{3^2\cdot 2}+\ldots+\frac{(x-6)^n}{3^n\cdot n}+\ldots$

Розв'язання

1. Члени цього ряду утворюють геометричну прогресію зі знаменником $q=\frac{1}{x^2}$.

Такий ряд буде збігатись, якщо $|q|<1$, тобто $\left|\frac{1}{x^2}\right|<1$, $\left|x^2\right|>1$. Таким чином область збіжності має вигляд $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

2. Застосуємо до цього ряду радікальну ознаку збіжності Коші.

Загальний член ряду $u_n=e^{-nx}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-nx}}=e^{-x}\begin{cases}<1, & \text{коли} \quad x>0;\\ >1, & \text{коли} \quad x<0,\end{cases}$$

тобто ряд збігається за додатних значень x і розбігається за від'ємних значень x. У точці $x=0$ цей ряд перетворюється в числовий ряд $1+1+...+1+...$, який розбігається.

Висновок. Область збіжності цього ряду $x\in(0;+\infty)$.

3. Будемо визначати область збіжності степеневого ряду за допомогою радіуса збіжності

$$a_n=\left|\frac{2^n}{n}\right|,\quad a_{n+1}=\left|\frac{2^{n+1}}{n+1}\right|.$$

За допомогою формули (11) знайдемо, що

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{2^n}\cdot(n+1)}{n\cdot\cancel{2^n}\cdot 2}\right|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=\frac{1}{2},$$

інтервал збіжності ряду $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності:

– коли $x_0=-\frac{1}{2}$, то маємо числовий ряд з від'ємними членами: $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-...-\frac{1}{n}-...=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається;

– коли $x_0=\frac{1}{2}$, то маємо знакопереміжний числовий ряд: $-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...$, який за ознакою Лейбніца збігається.

Тому область збіжності степеневого ряду має вигляд подвійної нерівності $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$.

4. Скористаємось радіусом збіжності. Побудуємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$; $a_n=\frac{1}{n!}$; $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$; $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Отже, заданий ряд збігається абсолютно для $x\in(-\infty;+\infty)$.

5. У цьому прикладі маємо справу з рядом виду (10). Скористаємося ознакою Д'Аламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n-1};\quad a_n(x-a)^n=\frac{(x-2)^n}{2n-1};\quad a_{n+1}(x-a)^{n+1}=\frac{(x-2)^{n+1}}{2n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{\cancel{n+1}}\cdot(2n-1)}{\cancel{(x-2)^n}\cdot(2n+1)}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right| = |x-2|.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд збігається, якщо $|x-2|<1$, тобто $1<x<3$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності.

Коли $x_0=1$, то маємо знакопереміжний числовий ряд $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+$ $+(-1)^n\cdot\frac{1}{2n-1}+\ldots$, який за ознакою Лейбніца збігається.

Коли $x_0=3$, то маємо числовий ряд з додатними членами

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}.$$

Цей ряд дослідимо за інтегральною ознакою Коші

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln|2x-1|\Big|_1^b=\infty,$$

ряд розбігається. Тому область збіжності степеневого ряду має вигляд подвійної нерівності $1\le x<3$.

6. Маємо справу з рядом виду (10). Скористаємось формулою (11).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{3^n\cdot n};\quad a_n=\frac{1}{3^n\cdot n};\quad a_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}.$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{\cancel{n+1}}\cdot(n+1)}{\cancel{3^n}\cdot n}\right|=3\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=3,$$

тобто область збіжності ряду $|x-6|<3$, $3<x<9$.

Коли $x=3\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$, ряд збігається за ознакою Лейбніца.

Коли $x=9\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, ряд розбігається за інтегральною ознакою Коші.

Тому область збіжності степеневого ряду має вигляд подвійної нерівності $3\le x<9$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\cdot\sqrt{3n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot x^n$;

3) $\frac{x}{3}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{3^3}+\ldots$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\cdot\sqrt{n}}$;

5) $\frac{3x}{\sqrt{2}}+\frac{3^2\cdot x^2}{\sqrt{2^2}}+\frac{3^3\cdot x^3}{\sqrt{2^3}}+\ldots$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^4}\cdot x^{2n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$;

8) $\frac{(x+8)^3}{1}+\frac{(x+8)^6}{4}+\frac{(x+8)^9}{9}+\ldots$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}\cdot x^{2n}$;

10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Відповідь: **1)** $x\in(-5;5)$; **2)** $x\in\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$;

3) $x\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$; **4)** $x\in(-3;3)$; **5)** $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$;

6) $x\in\left(-\sqrt{\frac{e}{2}};\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$; **7)** $x\in(3;5)$; **8)** $x\in(-9;-7)$;

9) $x\in(-\infty;\infty)$; **10)** $x\in(-\infty;\infty)$.

10. РОЗКЛАДАННЯ ФУНКЦІЙ В РЯДИ ТЕЙЛОРА І МАКЛОРЕНА

Якщо функція $f(x)$ в околі точки $x=a$ має похідні будь-якого порядку, тоді для неї можна записати ряд виду

$$f(x)\sim f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^2+\ldots, \qquad (13)$$

який називається **рядом Тейлора** функції $f(x)$. Формально наведений ряд (13) для функції $f(x)$ не завжди збігається. Іноді він збігається, але сума не дорівнює $f(x)$. Суму n перших членів ряду (13) позначають $S_n(x)$, різницю $f(x)-S_n(x)=R_n(x)$. $R_n(x)$ називають **залишковим числом ряду.**

При $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ ряд (13) збігається і його сума дорівнює $f(x)$. Формула (13) називається розвиненням функції $f(x)$ у ряд Тейлора в околі точки a.

Якщо $a=0$, то ряд Тейлора перетворюється на ряд Маклорена

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (14)$$

Якщо функція дорівнює ряду Тейлора або Маклорена, то кажуть, що її подано рядом Тейлора або Маклорена. Залишковий член можна обчислити за допомогою формули Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1};$$

$$\xi=a+\theta(x-a),\qquad 0<\theta<1.$$

Теорема єдності. Якщо на деякому інтервалі $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, то на цьому інтервалі існує єдиний ряд Тейлора, збіжний до цієї функції.

Тепер можна визначити порядок розвинення функції в ряди Тейлора і Маклорена:

1) у ряди Тейлора і Маклорена можна розвинути лише функції, що мають похідні будь-якого порядку (знаходять ці похідні як функції від x, бажано у загальному вигляді);

2) визначають похідну $f^{(n)}(a)$ або $f^{(n)}(0)$ у точці, в околі якої виконують розвинення в ряд;

3) записують ряд Тейлора або Маклорена для заданої функції і визначають інтервал (радіус) збіжності цього ряду;

4) визначають інтервал, в якому $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$; якщо такий інтервал існує, то в цьому інтервалі функція і ряд збігаються.

11. ОСНОВНІ РОЗВИНЕННЯ

Використовуючи теорему єдності, складну задачу розвинення функції в ряд Тейлора можна спростити таким чином: маючи розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій, потім їх використовують для розвинення в ряд Тейлора чи Маклорена інших функцій. Особливо часто використовують розвинення в ряд по степенях x таких функцій:

1) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty; \qquad (15)$$

2) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty; \qquad (16)$$

3) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty; \qquad (17)$$

4) **біномний ряд.** Поставимо задачу про розвинення функції $y = (1+x)^m$, де m – будь-яке дійсне число в околі точки $x = 0$. У результаті отримаємо

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots$$

$$\text{при} \quad -1 < x < 1. \qquad (19)$$

Ряд (19) називається біномним рядом.

5) деякі окремі приклади із біномних рядів:

Нехай $m = -1$, тоді

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n \cdot x^{n-1} + \ldots \text{ при } x \in (-1;1). \qquad (20)$$

Нехай $m = -\dfrac{1}{2}$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots \text{ при } x\in(-1;1); \qquad (21)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\ldots \text{ при } x\in(-1;1); \qquad (22)$$

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\ldots \text{ при } x\in(-1;1); \qquad (23)$$

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}+\ldots \text{ при } x\in(-1;1); \qquad (24)$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \text{ при } x\in(-1;1). \qquad (25)$$

Приклад:

1. Записати ряд Тейлора для функції $f(x)=\ln x$ в околі точки $a=2$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в околі точки $a=-2$.

3. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=x^2\cdot e^{3x}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos^2 x$.

5. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sqrt[3]{27+x^3}$.

Розв'язання

1. Відшукаємо похідні від функції $f(x)=\ln x$ будь-якого порядку та обчислимо їх в точці $a=2$:

$f(x)=\ln x$, $\qquad f(2)=\ln 2$,

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\qquad f'(2)=\dfrac{1}{2}$,

$f''(x)=\dfrac{-1}{x^2}$, $\qquad f''(2)=\dfrac{-1}{2^2}$,

$f'''(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $\qquad f'''(2)=\dfrac{1\cdot 2}{2^3}$,

… $\qquad$ …

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$, $\qquad f^{(n)}(2)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{2^n}$,

Підставимо значення похідних до формули (13)

$$\ln x=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{2^2\cdot 2}+\frac{(x-2)^3}{2^3\cdot 3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x-2)^n}{2^n\cdot n}+\ldots$$

2. Зробимо ті ж самі дії, що і в першому прикладі:

$f(x)=x^{-1}$, $\quad f(-2)=-\frac{1}{2}$,

$f'(x)=-x^{-2}$, $\quad f'(-2)=-\frac{1!}{2^2}$,

$f''(x)=1\cdot 2\cdot x^{-3}$, $\quad f''(2)=\frac{-2!}{2^3}$,

$f'''(x)=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}$, $\quad f'''(2)=\frac{-3!}{2^4}$,

… $\quad$ …

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\cdot x^{-(n+1)}$, $\quad f^{(n)}(-2)=-\frac{n!}{2^{n+1}}$.

Підставимо ці значення до ряду Тейлора (формула (13)):

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}\cdot\left[1+\frac{x+2}{2}+\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(x-2)^3}{2^3}+...+\frac{(x+2)^n}{2^n}+...\right].$$

3. Візьмемо функцію $f_1(x)=e^{3x}$. Нехай $3x=t$, отримаємо за допомогою (15), що

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}+... \quad \text{при} \quad t\in(-\infty;\infty).$$

Рівняння $e^{3x}=1+\frac{3x}{1!}+\frac{(3x)^2}{2!}+...+\frac{(3x)^n}{n!}+...$ при $t\in(-\infty;\infty)$.

Помножимо останнє рівняння на x^2, отримаємо

$$x^2\cdot e^{3x}=x^2+\frac{3\cdot x^3}{1!}+\frac{3^2\cdot x^4}{2!}+...+\frac{3^n\cdot x^{n+2}}{n!}+... \quad \text{при} \quad t\in(-\infty;\infty).$$

4. Надану функцію запишемо у вигляді $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

Нехай $2x=t$, тоді за допомогою (17) маємо

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-...+(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{(2n)!}+...$$

Це розкладання вірне для будь-яких дійсних t. Тоді

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-...+(-1)^n\cdot\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+...$$

Помножимо обидві частини останнього рівняння на $\frac{1}{2}$, додамо до лівої та правої частин $\frac{1}{2}$ і отримаємо

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\cos^2 x=1-\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}-...+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+...$$

при $x\in(-\infty;\infty)$.

5. Перепишемо цю функцію у вигляді

$$\sqrt[3]{27+x^3}=3\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Нехай $\left(\frac{x}{3}\right)^3=t$, за допомогою (19) при $m=\frac{1}{3}$ отримаємо

$$(1+t)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3\cdot 1!}\cdot t+\frac{1\cdot(-2)}{3^2\cdot 2!}\cdot t^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}\cdot t^3...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot...\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!}\cdot t^n+...$$

при $-1<t<1$.

Повертаючись до змінної x, отримаємо:

$$\sqrt[3]{27+x^3}=3\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}=3\cdot\left[1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^3-\frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{3}\right)^6+...+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot...\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^{3n}+...\right] \quad \text{при} \quad x\in\left(-\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{3}\right).$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x)$ в околі точки $a=a_0$

1) $f(x)=\ln(x+2)$, $a=1$; 2) $f(x)=\frac{1}{x-4}$, $a=-2$;

3) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, $a=\frac{\pi}{2}$; 4) $f(x)=e^x$, $a=-2$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)$:

1) $f(x)=x\cdot\ln(1+x^2)$; 2) $f(x)=\frac{1}{x+2}$;

3) $f(x)=(1+x)\cdot e^x$; 4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

5) $f(x)=x^2\cdot\sin 3x$.

12. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

12.1. Обчислення значень функції

Розвинення функцій в ряди Маклорена дозволяють у багатьох випадках із великою точністю обчислювати значення цих функцій.

Приклад 1. Обчислити з точністю до 0,0001 значення $\sqrt[10]{e}$. Скориставшись (15), будемо мати:

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^3}{3!} + \ldots;$$

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + 0,1 + 0,005 + 0,0003 + \ldots \approx 1,1053.$$

Для того, щоб оцінити похибку обчислення, скористаємось формулою Лагранжа із розділу 10.

$$R_3 = \frac{e^4}{4!} \cdot x^4 = \frac{e^4}{4!}(0,1)^4 < \frac{e}{4! \cdot 10^4} < \frac{3}{4! \cdot 10^4} = 0,00001; \quad (0 < \xi < 1).$$

Приклад 2. Обчислити $\sin 5°$ з точністю до 0,0001 $\sin 5° = \sin\left(\frac{\pi}{36}\right)$.

Скориставшись (16), будемо мати

$$\sin 5° = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5 - \ldots,$$

$$\sin 5° \approx 0,0872 - \frac{1}{6} \cdot 0,0006 \approx 0,0871.$$

Ряд (16) знакопереміжний, тому залишковий член R_3 буде менше першого відкинутого члена ряду, тобто

$$R_3 < \frac{1}{5!} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^5 = 10^{-7}.$$

12.2. Обчислення визначених інтегралів

Багато практично необхідних визначених інтегралів не можна обчислити за допомогою формули Ньютона–Лейбніца тому, що часто первісна підінтегральної функції не може бути виражена в елементарних функціях. Коли підінтегральна функція розкладається в степеневий ряд і границі інтегрування належать інтервалу збіжності ряду, тоді визначений інтеграл може бути обчислений наближено з наперед заданою точністю.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2} dx$ із точністю до 0,0001.

Розв'язання

Розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд має вигляд

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Це рівняння вірно за будь-яких x. Будемо інтегрувати цей ряд почленно і в результаті отримаємо:

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx = \int_0^{1/4}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ...\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + ...\right)\Bigg|_0^{1/4},$$

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4^3} = 0,2448.$$

Похибка обчислення $R_3 < \frac{1}{5\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0,00008$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_{0,5}^{1} \frac{\sin x}{x}dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання

Візьмемо за основу розвинення формулу (16). Тоді розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд має вигляд

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...$$

$$\int_{0,5}^{1} \frac{\sin x}{x}dx = \int_{0,5}^{1}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + ...\right)\Bigg|_{0,5}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + ...\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 3!} + \frac{1}{2^5\cdot 5\cdot 5!} - \frac{1}{2^7\cdot 7\cdot 7!} + ...\right);$$

$$R_3 < \frac{1}{5\cdot 5!2^5} < 0,0005.$$

Тоді $\int_{0,5}^{1} \frac{\sin x}{x}dx = \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 3!}\right) \approx 0,4530$.

12.3. Інтегрування диференціальних рівнянь

За допомогою розвинення функцій в степеневі ряди можна наближено інтегрувати диференціальні рівняння. Нехай необхідно знайти розв'язання диференціального рівняння другого порядку $y'' = F(x, y, y')$, яке задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Розв'язання рівняння шукаємо у вигляді ряда Тейлора

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

1. Знайти три перших члена розвинення в ряд Маклорена функції, яка є

частинним розв'язком рівняння $y'' = -x^2 \cdot y$, яке задовольняє початкові умови: $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання

Із рівняння $y'' = -x^2 y$ находимо $f''(0) = y''(0) = 0$. Диференціюємо надане рівняння та підставляємо початкові умови. У результаті отримаємо:

$y^{\mathrm{III}} = -2xy - x^2 y'$, $\quad y^{\mathrm{III}}(0) = f^{\mathrm{III}}(0) = 0$;

$y^{\mathrm{IV}} = -2y - 4xy' - x^2 y''$, $\quad y^{\mathrm{IV}}(0) = f^{\mathrm{IV}}(0) = -2$;

$y^{\mathrm{V}} = -6y' - 6xy'' - x^2 y'''$, $\quad y^{\mathrm{V}}(0) = f^{\mathrm{V}}(0) = 0$;

$y^{\mathrm{VI}} = -12y' - 8xy^{\mathrm{III}} - x^2 y^{\mathrm{IV}}$, $\quad y^{\mathrm{VI}}(0) = f^{\mathrm{VI}}(0) = 0$;

$y^{\mathrm{VII}} = -20y^{\mathrm{III}} - 10xy^{\mathrm{IV}} - x^2 y^{\mathrm{V}}$, $\quad y^{\mathrm{VII}}(0) = f^{\mathrm{VII}}(0) = 0$;

$y^{\mathrm{VIII}} = -30y^{\mathrm{IV}} - 12xy^{\mathrm{VI}} - x^2 y^{\mathrm{VI}}$, $\quad y^{\mathrm{VIII}}(0) = f^{\mathrm{VIII}}(0) = 60$.

Підставляємо значення похідних в (13). Отримаємо декілька перших членів розвинення в ряд Маклорена функції $f(x)$, яке є частинним розв'язком наданого рівняння

$$f(x) = 1 - \frac{2}{4!} \cdot x^4 + \frac{60}{8!} \cdot x^8 + \ldots$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 10^{-3}:

1) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$; 2) $\int\limits_0^1 \sin(x^2) dx$; 3) $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

Відповідь: 1) $\approx 0{,}480$**; 2)** $\approx 0{,}310$**; 3)** $\approx 0{,}333$**.**

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

1) $y'' - xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

2) $y'' = xy' - y + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

3) $y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

Відповідь: 1) $y = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$; 2) $y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$;

3) $y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{15x^6}{6!} + \ldots$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

1 а, б, в – дослідити на збіжність подані числові ряди;

2 а, б – з'ясувати, чи є знакопереміжний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним;

3 а, б, в – знайти область збіжності степеневого ряду;

4 – розвинути в ряд Тейлора функцію в околі точки $a = a_0$;

5 – знайти три перших відмінних від нуля члени розвинення в ряд Маклорена функції;

6 а, б – розвинути в ряд по степенях x подані функції, користуючись відомими розвиненнями функцій у ряд Маклорена;

7 а, б – користуючись розвиненням у ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001;

8 а, б – знайти розв'язок диференціального рівняння.

Варіант 1

1. а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\ldots$; б) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots$;

в) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots$

2. а) $\frac{1}{1\cdot 2!}-\frac{1}{3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 6!}-\ldots$; б) $\frac{3}{2}-\frac{3^2}{7}+\frac{3^3}{12}-\ldots$

3. а) $\frac{3x}{\sqrt{2}}+\frac{3^2\cdot x^2}{\sqrt{2^2}}+\frac{3^3\cdot x^3}{\sqrt{2^3}}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}x^{2n}$.

4. $f(x)=\sqrt{x+3}$, $a_0=1$.

5. $f(x)=\sin^2(x-a)$.

6. а) $f(x)=x^2\cdot\ln(1+x^2)$; б) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$.

7. а) $\cos 10°$; б) $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^3}$.

8. а) $y'=x^2y$, $y(0)=1$; б) $y'=xy+e^{xy}$, $y(0)=2$.

Варинт 2

1. а) $3+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\frac{3^4\cdot 4!}{4^4}+\ldots$; б) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+\ldots$;

в) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\ldots$

2. а) $1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots$; б) $\frac{3^2}{4}-\frac{3^4}{6}+\frac{3^6}{8}-\ldots$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{3^{n-1}\cdot\sqrt{n}}$; б) $(x+4)+\frac{(x+4)^2}{3\cdot 2}+\frac{(x+4)^3}{5\cdot 2^2}+\ldots$;

в) $(x+8)^3+\frac{(x+8)^6}{4}+\frac{(x+8)^9}{9}+...$

4. $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$, $a_0=3$.

5. $f(x)=2^{\sin x}$.

6. а) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

7. а) $\int\limits_0^{1/2} x\cdot\cos\sqrt{x}dx$; б) $\sqrt[3]{e}$.

8. а) $\frac{y'}{x}+y=0$, $y(0)=1$; б) $y''=y\cos x+\sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Варіант 3

1. а) $2+\frac{2^2}{1\cdot2}+\frac{2^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+...$; б) $\frac{1}{2\ln^3 2}+\frac{1}{3\ln^3 3}+\frac{1}{4\ln^3 4}+...$;

в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+...$

2. а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+...$; б) $\frac{4}{5}-\frac{7}{9}+\frac{10}{13}-...$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{\sqrt{(3n+1)\cdot 2^n}}$; б) $\frac{x+1}{1\cdot2}+\frac{(x+1)^2}{3\cdot2^2}+\frac{(x+1)^3}{5\cdot2^3}+...$;

в) $(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{4n+3}$.

4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x+8}}$, $a_0=8$.

5. $f(x)=\ln(e+x)$.

6. а) $f(x)=\cos(x^4)$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

7. а) $\int\limits_0^{0,2}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$; б) $\sqrt[3]{70}$.

8. а) $y'=x^2-2y$, $y(0)=1$; б) $y'=y+xe^y$, $y(0)=0$.

Варіант 4

1. а) $\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{2\cdot25}}+\frac{7}{\sqrt{3\cdot125}}+...$; б) $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+...$;

в) $\frac{3}{2}+\frac{3\cdot5}{2\cdot7}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot7\cdot12}+...$

2. а) $1-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{11^2}-...;$ б) $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2^2}{5\cdot 8}-...$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)\cdot 2}{(2n)!}\cdot x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n}\cdot(x+1)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}10^{2n}\cdot(2x-3)^{2n-1}$.

4. $f(x)=2^x$, $a_0=3$.

5. $f(x)=\ln(\cos x)$.

6. а) $f(x)=\cos\frac{x^2}{2}$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

7. а) $\sqrt[3]{754}$; б) $\int_0^{1/4} x\cdot\sin^2 x dx$.

8. а) $y'=2y+e^x$, $y(0)=0$; б) $y'=2x+\cos y$, $y(0)=0$.

Варіант 5

1. а) $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}+...;$ б) $\frac{1}{\sqrt{5\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 5^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 5^3}}+...;$

в) $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+3^2}+...$

2. а) $-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)+...;$ б) $1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}-...$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^{n-1}}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot(x-3)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot\left(x^{2n+1}\right)}{2n+3}$.

4. $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $a_0=-1$.

5. $f(x)=e^{x^2+3}$.

6. а) $f(x)=x\cdot\sin(x^2)$; б) $f(x)=\sqrt{4+x^2}$.

7. а) $\cos 5°$; б) $\int_0^{1/2}\frac{\sin x}{x}dx$.

8. а) $y'=y^3+xe^y$, $y(0)=0$; б) $y'=x^2+y^3$, $y(1)=1$.

Варіант 6

1. а) $\frac{1}{2}+\frac{4}{2\cdot 4}+\frac{9}{2\cdot 4\cdot 6}+...;$ б) $1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{7}}+...;$

в) $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+...$

2. а) $-\frac{1}{13}+\frac{2}{20}-\frac{3}{27}+...$; б) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}-...$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{3n+1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n^3}$.

4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $a_0=1$.

5. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

6. а) $f(x)=e^{-3x}\cdot x$; б) $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

7. а) $\ln 1,2$; б) $\int_0^{0,2} x^2\cdot e^{-x}dx$.

8. а) $(1+x^2)y'-y=0$, $y(0)=1$; б) $x^2\cdot y^2-1$, $y(-1)=1$.

Варiнт 7

1. а) $\frac{2}{101}+\frac{4}{201}+\frac{8}{301}+...$; б) $\frac{7^3}{1!}+\frac{7^6}{3!}+\frac{7^9}{5!}+...$;

в) $1+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+...$

2. а) $-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{4}{9}+...$; б) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+...$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4\cdot x^n}{4n-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^2}{(2n+1)\cdot 3^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^{3n}}{n^2}$.

4. $f(x)=\cos\frac{\pi}{6}x$, $a_0=3$.

5. $f(x)=\cos^2 x$.

6. а) $f(x)=\cos(x^2)$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$.

7. а) $\cos 1°$; б) $\int_0^{0,1} x\cdot e^{-2x}dx$.

8. а) $y' - (1+x)y = 0$, $y(0) = 1$; б) $y' = e^y + xy$, $y(0) = 0$.

Варіант 8

1. а) $\frac{1}{1\cdot\sqrt[4]{1}} + \frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{3\cdot\sqrt[4]{3}} + \dots$; б) $\frac{\sqrt{1\cdot 5}}{101} + \frac{\sqrt{2\cdot 25}}{102} + \frac{\sqrt{3\cdot 125}}{103} + \dots$;

   в) $\frac{100}{1!} + \frac{100^2}{2!} + \frac{100^3}{3!} + \dots$

2. а) $0{,}001 - \sqrt{0{,}001} + \sqrt[3]{0{,}001} - \dots$; б) $-\frac{1}{3} + \frac{2}{8} - \frac{3}{13} + \dots$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(4n-3)\cdot 10^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{5^{2n-1}\cdot\sqrt{n}}$.

4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $a_0 = 1$.

5. $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$.

6. а) $f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$; б) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

7. а) $\ln 7$; б) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$.

8. а) $y' = xy^3 + y$, $y(0) = 1$; б) $y' = x + y^2$, $y(-2) = 1$.

Варіант 9

1. а) $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots$; б) $\frac{4}{10} + \frac{16}{17} + \frac{64}{24} \dots$;

   в) $\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{9}{7}} + \sqrt{\frac{27}{9}} + \dots$

2. а) $\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \dots$; б) $\frac{1}{e} - \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} - \dots$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot x^n}{n\cdot 4^n}$; б) $\frac{(2x-3)^n}{n\cdot 9^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\sqrt[4]{n}}$.

4. $f(x) = \frac{1}{5-x}$, $a_0 = 2$.

5. $f(x) = \ln^3(2x+1)$.

6. а) $f(x) = x\cdot e^{\frac{x}{2}}$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

7. а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$; б) $\int\limits_0^{1/4} e^{-x}dx$.

8. а) $y' = 3y - xe^x$, $y(0) = 1$; б) $y' = x^2 + 0,2y^2$, $y(0) = 0,1$.

Варіант 10

1. а) $\frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \ldots$; б) $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots$;

   в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$

2. а) $-\frac{3}{7} + \frac{4}{10} - \frac{5}{13} + \ldots$; б) $1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \ldots$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 4^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3\cdot (x-3)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot x^{2n-1}}{2n+3}$.

4. $f(x) = \frac{1}{5-x}$, $a_0 = 2$.

5. $f(x) = e^{x^2+3}$.

6. а) $f(x) = e^{-x^3}$; б) $f(x) = \sqrt[4]{1+x^3}$.

7. а) $\sqrt[5]{30}$; б) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$.

8. а) $y' = 3y - xe^y$, $y(0) = 1$; б) $y' = x^2 + 0,2y^2$, $y(0) = 0,1$.

Варіант 11

1. а) $2 + \frac{2^2}{1\cdot 2} + \frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$; б) $\frac{1}{2\ln^3 2} + \frac{1}{3\ln^3 3} + \frac{1}{4\ln^3 4} + \ldots$;

   в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots$

2. а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \ldots$; б) $\frac{4}{5} - \frac{7}{9} + \frac{10}{13} - \ldots$;

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\cdot x^n}{\sqrt{(3n+1)\cdot 2^n}}$; б) $\frac{(x+1)}{1\cdot 2} + \frac{(x+1)^2}{3\cdot 2^2} + \frac{(x+1)^3}{5\cdot 2^3}$;

   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{4n+3}$.

4. $f(x) = 2^x$, $a_0 = 3$.

5. $f(x) = \ln(\cos x)$.

6. а) $f(x) = \cos\dfrac{x^2}{2}$;　　б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

7. а) $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$;　　б) $\ln 5$.

8. а) $y' = y\sin x + y$, $y(0) = 1$;　　б) $y' = 0{,}2x + y^2$, $y(0) = 1$.

Варіант 12

1. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}$;　　б) $1 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{17} + \ldots$;

   в) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} + \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 7 \cdot 12} + \ldots$

2. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)\dfrac{2^n}{n}$;　　б) $1 - \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \ldots$

3. а) $\dfrac{x}{1 \cdot 2} + \dfrac{x^2}{2 \cdot 3} + \dfrac{x^3}{3 \cdot 4} + \ldots$;　　б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (x+1)^n}{n}$;

   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n + 3^n}$.

4. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

5. $f(x) = e^x \cos x$.

6. а) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}$;　　б) $f(x) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$.

7. а) $\sin 5°$;　　б) $\int\limits_0^{1/2} \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx$.

8. а) $y' + y^2 = e^x$, $y(0) = 0$;　　б) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0{,}1$.

Варіант 13

1. а) $\dfrac{4}{2} + \dfrac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \dfrac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \ldots$;　　б) $1 + \dfrac{4}{2 \cdot 3} + \dfrac{4^2}{2^2 \cdot 5} + \dfrac{4^3}{2^3 \cdot 7} + \ldots$;

   в) $1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} + \ldots$

2. а) $1 - \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} - \dfrac{1}{4^4} + \ldots$;　　б) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} - \dfrac{4}{2^4} + \ldots$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{\sqrt[5]{n^2}}$; б) $-\frac{x}{3\cdot\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3^2\cdot\sqrt{3}}-\frac{x^5}{3^3\cdot\sqrt{4}}+\ldots$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}5^{2n}(x+1)^{2n-1}$.

4. $f(x)=e^x$, $a_0=2$.

5. $f(x)=\sin^2 x$.

6. а) $f(x)=2x\cos^2 x$; б) $f(x)=\sqrt[5]{1+x}$.

7. а) $\frac{1}{e^3}$; б) $\int_0^{1/4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

8. а) $y''+\frac{x}{2}y'-y=\frac{3}{2}x-2$, $y(0)=4$, $y'(0)=-3$;

б) $y''=-2xy$, $y(1)=y'(1)=1$.

Варіант 14

1. а) $\frac{1}{2}+\frac{7}{4}+\frac{13}{8}+\ldots$; б) $\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{19}+\ldots$;

в) $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot7}{2\cdot6}+\frac{4\cdot7\cdot10}{2\cdot6\cdot10}+\ldots$

2. а) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\ldots$; б) $\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\ldots$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n\cdot6^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}\cdot x^{2n-2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n^2\cdot3^n}$.

4. $f(x)=\sqrt{x}$, $a_0=4$.

5. $f(x)=\ln(e^x+x)$.

6. а) $f(x)=(1+x)\cdot e^x$; б) $f(x)=\sqrt[4]{1-x}$.

7. а) $\sqrt[4]{18}$; б) $\int_0^1 x^2e^{-x^2}dx$.

8. а) $y'=y^3+xe^y$, $y(0)=0$; б) $y'=y^2-\sin 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Варіант 15

1. а) $\frac{2}{3}+\frac{9}{3\cdot6}+\frac{16}{3\cdot6\cdot9}+\ldots$; б) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\ldots$;

в) $\frac{3!}{3}+\frac{5!}{7}+\frac{7!}{11}+\ldots$

2. а) $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{14}-\frac{1}{19}+\ldots$; б) $1-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\ldots$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{6n-5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{(3n+1)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$.

4. $f(x)=\cos\frac{x}{8}$, $a_0=4\pi$.

5. $f(x)=x\cdot\sin^2 x$.

6. а) $f(x)=\frac{e^{x^2}}{x}$; б) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

7. а) $\cos 5°$; б) $\int_0^{1/2}\frac{\sin x}{x}dx$.

8. а) $(1+x^2)y'-y=0$, $y(0)=1$; б) $3y'+2\sin xy=e^x$, $y(0)=1$.

Варіант 16

1. а) $\frac{2}{7}+\frac{4}{9}+\frac{6}{11}+\ldots$; б) $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot5}{1\cdot3}+\frac{1\cdot5\cdot9}{1\cdot3\cdot5}+\ldots$;
   в) $3+\frac{9}{16}+\frac{27}{81}+\ldots$

2. а) $-1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots$; б) $\frac{\sin\alpha}{1\sqrt{1}}-\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}}+\frac{\sin 3\alpha}{3\sqrt{3}}-\ldots$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}\cdot x^{2n}}{\sqrt{n}}$.

4. $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $a_0=-1$.

5. $f(x)=e^{x^2+3}$.

6. а) $f(x)=x\cdot\sin(x^2)$; б) $f(x)=\sqrt{4+x^2}$.

7. а) $\ln 1{,}2$; б) $\int_0^{0,2}x^2\cdot e^{-x}dx$.

8. а) $y'=x^2+y\cos x$, $y(0)=1$; б) $y'=x^2y^2-e^x$, $y(0)=0$.

Варіант 17

1. а) $1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots$; б) $\frac{1}{20}+\frac{10}{40}+\frac{19}{80}+\ldots$;
   в) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3\cdot8}+\ldots$

2. а) $\frac{21}{5}-\frac{41}{25}+\frac{61}{125}-...;$ б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+...$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{(2n+1)\cdot 3^n};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n^2};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}4^{2n}(3x-2)^{2n-1}.$

4. $f(x)=\frac{1}{x-4},\ a_0=-2.$

5. $f(x)=\mathrm{tg}x.$

6. а) $f(x)=\sin\frac{x}{3};$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

7. а) $\cos 1^\circ;$ б) $\int\limits_0^{0,1} xe^{-2x}dx.$

8. а) $y'=xy^3+y,\ y(0)=1;$ б) $y'=y^2\sin x-4y^3,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Варіант 18

1. а) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+...;$ б) $\frac{7}{2\cdot 3}+\frac{49}{4\cdot 5}+\frac{343}{8\cdot 7}+...;$

   в) $1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+...$

2. а) $\frac{1}{5}-\frac{3}{8}+\frac{5}{11}-...;$ б) $1-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{11^2}+...$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{10^n};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^2}{(n+1)\cdot\ln(n+1)};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$

4. $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right),\ a_0=3.$

5. $f(x)=\cos^2 x.$

6. а) $f(x)=\cos x^2;$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}.$

7. а) $\ln 7;$ б) $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^4}.$

8. а) $y'=x-y^3,\ y(0)=1;$ б) $xy''+y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=1.$

Варіант 19

1. а) $\frac{2}{101}+\frac{4}{201}+\frac{8}{301}+...;$ б) $\frac{7^3}{1!}+\frac{7^6}{3!}+\frac{7^9}{5!}+...;$

в) $1+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\ldots$

2. а) $-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{4}{9}+\ldots$; б) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4 x^n}{4n-3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^{3n}}{n^2}$.

4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $a_0=1$.

5. $f(x)=\operatorname{arctg} x^2$.

6. а) $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$; б) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

7. а) $\sqrt[3]{1{,}8}$; б) $\int\limits_0^1 \cos(x^3)dx$.

8. а) $y'=x+y+\cos y$, $y(0)=0$; б) $y'=1+x-\frac{y^3}{3}$, $y(3)=3$.

Варіант 20

1. а) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$; б) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\ldots$;

   в) $\frac{1}{100}+\frac{1\cdot 4}{100\cdot 102}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{100\cdot 102\cdot 104}+\ldots$

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^4 n}$.

3. а) $x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}\cdot\sqrt{n}}\cdot x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n\cdot(2x-1)^{2n-1}$

4. $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, $a_0=2$.

5. $f(x)=\sin^2 x$.

6. а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; б) $f(x)=x^2e^x$.

7. а) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$; б) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$.

8. а) $y'=x^2-y^2$, $y(0)=0$; б) $y'=2y+x-1$, $y(1)=1$.

Варіант 21

1. а) $\frac{1!}{2\cdot 1}+\frac{3!}{5\cdot 3}+\frac{5!}{8\cdot 3^2}+.\frac{7!}{11\cdot 3^3}...$; б) $\frac{2}{1}+\frac{4}{5}+\frac{6}{9}+...$;

в) $\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 4}{5\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{8\cdot 2^3}+...$

2. а) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{5}{3n-6}$; б) $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}-...$

3. а) $\frac{x}{2\cdot 1}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+...$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$;

в) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+....$

4. $f(x)=\frac{1}{x}$, $a_0=3$.

5. $f(x)=-\ln(\cos x)$.

6. а) $f(x)=\ln(2+x)$; б) $f(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x}$.

7. а) $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$; б) $\sqrt[3]{130}$.

8. а) $y''=x+\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$; б) $y'=\frac{xy}{1+x+y}$, $y(0)=0$.

Варіант 22

1. а) $e^{-1}+\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}+...$; б) $\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}}+\frac{1}{3\sqrt{\ln 3}}+\frac{1}{4\sqrt{\ln 4}}...$;

в) $1+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+...$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$; б) $\frac{1}{e}-\frac{2^3}{e^2}+\frac{3^3}{e^3}-...$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x-2)^n}{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n}$.

4. $f(x)=\ln x$, $a_0=1$.

5. $f(x)=\operatorname{ctg}x$.

6. а) $f(x)=\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$; б) $f(x)=\ln(x+10)$.

7. а) $\cos 18^\circ$; б) $\int_0^3 \frac{\sin x^2}{x}dx$.

8. а) $y' = \sin y - \sin x$, $y(0) = 0$; б) $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$, $y(0) = 1$.

Варіант 23

1. а) $\frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{18} + \ldots$; б) $\frac{\sin^2\alpha}{1} + \frac{\sin^2 2\alpha}{8} + \frac{\sin^2 3\alpha}{27} + \ldots$;

   в) $\frac{1}{1\cdot 1} + \frac{2}{3\cdot 3} + \frac{3}{3^2\cdot 5} + \ldots$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{6n-5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2\cdot x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

4. $f(x) = \mathrm{arctg}(x^2)$, $a_0 = -1$.

5. $f(x) = \mathrm{tg}\, x$.

6. а) $f(x) = (x - \mathrm{tg}\, x)\cdot\cos x$; б) $f(x) = \ln\left[(1+x)\cdot(1+2x)\right]$.

7. а) $\sqrt[5]{1{,}1}$; б) $\int_0^{0{,}1}\frac{e^x - 1}{x}dx$.

8. а) $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$, $y(1) = 1$; б) $y' = x^2y^2 - 1$, $y(0) = 1$.

Варіант 24

1. а) $3 + \frac{3^3\cdot 2!}{2^3} + \frac{3^3\cdot 3!}{3^3} + \ldots$; б) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \ldots$; в) $1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots$

2. а) $-\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} + \ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$

3. а) $\frac{x-3}{1\cdot 5} + \frac{(x-3)^2}{2\cdot 25} + \frac{(x-3)^3}{3\cdot 125} + \ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{3n-4}$;

   в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

4. $f(x) = 2^x$, $a_0 = 1$.

5. $f(x) = \ln(e^x + x)$.

6. а) $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$; б) $f(x) = x\cdot\ln(1-2x)$.

7. а) $\sqrt[3]{130}$;　　　　б) $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

8. а) $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1,\ y(0) = 1$;　　　　б) $y' = e^x + y,\ y(0) = 1$.

Варіант 25

1. а) $\frac{7\cdot 1}{3\sqrt{2}} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(\frac{7}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + \ldots$; б) $\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 8} + \ldots$;

   в) $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \ldots$

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^3}{e^n}$;　　　　б) $-\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} - \ldots$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$;　　б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot x^n}{n!}$;　　в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$.

4. $f(x) = 3^x,\ a_0 = 2$.

5. $f(x) = \cos^2 x$.

6. а) $f(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{x}$;　　　　б) $f(x) = x\cdot e^{\sqrt{x}}$.

7. а) $\cos 18°$;　　　　б) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

8. а) $y' = 2y + x - 1,\ y(1) = 1$;　　　　б) $y'' + xy = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Варіант 26

1. а) $\frac{1\cdot 2}{10} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{10^3} + \ldots$;　　　　б) $1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \ldots$;

   в) $1 + \frac{2!}{2} + \frac{3!}{3} + \frac{4!}{4} + \ldots$

2. а) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$;　　　　б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n!}$;　　б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$;　　в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 \cdot x^{2n}}$.

4. $f(x) = 5^{-x},\ a_0 = -1$.

5. $f(x) = \ln(e^x + x)$.

6. а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;　　　　б) $f(x) = x\cdot\sqrt[3]{1-x}$.

7. а) $\sqrt[4]{19}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x}} dx$.

8. а) $y' = y + x^2$, $y(0) = -2$; б) $y' = x + y$, $y(0) = 1$.

Варіант 27

1. а) $1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots$; б) $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 10}} + \ldots$;

   в) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots$

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$; б) $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} \ldots$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$;

   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

4. $f(x) = \ln x$, $a_0 = e$.

5. $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(1+x)$.

6. а) $f(x) = x \cos \sqrt[3]{x}$; б) $f(x) = \frac{1 - e^{-3x}}{x}$.

7. а) $\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x} \cdot e^x dx$; б) $\sin 15°$.

8. а) $y'' - xy = 0$, $y(0) = c_1$, $y'(0) = c_2$; б) $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$.

Варіант 28

1. а) $1 + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 2^2} + \ldots$; б) $\frac{1}{2} + \frac{4}{9} + \frac{9}{28} + \ldots$;

   в) $\sin \pi + \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^3 + \ldots$

2. а) $1 - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{11^2} - \ldots$; б) $\frac{4}{5} - \frac{7}{9} + \frac{10}{13} - \ldots$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{3n^2 + 2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$;

   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot x^{2n}}{(n+1)^2 \cdot 2n}$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$, $a_0=4$.

5. $f(x)=e^x\cdot\sin x$.

6. а) $f(x)=(x-1)\cdot\sin 5x$; б) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x}$.

7. а) $\sqrt[4]{19}$; б) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cdot\cos x dx$.

8. а) $y'=y^2+x^3$, $y(0)=1/2$; б) $(1-x)y'=1+x-y$, $y(0)=0$.

Варіант 29

1. а) $\dfrac{1!}{3\cdot 1}+\dfrac{3!}{7\cdot 2}+\dfrac{5!}{11\cdot 3}+\ldots$; б) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{7}+\dfrac{10}{11}+\dfrac{17}{15}+\ldots$;

   в) $\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{\ln 3}{3}+\dfrac{\ln 4}{4}+\ldots$

2. а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{2}{3\cdot 5}+\dfrac{2^2}{5\cdot 8}-\ldots$; б) $-\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{10}-\dfrac{5}{13}+\ldots$;

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt{4n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n\cdot(n+2)}$;

   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{3^{n-1}\cdot\sqrt{n^3}}$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $a_0=2$.

5. $f(x)=\ln(\cos x)$.

6. а) $f(x)=2x\cdot\cos^2 x$; б) $f(x)=\dfrac{1+e^{-2x}}{x}$.

7. а) $\int\limits_0^{0,25}\sqrt{1+x^3}dx$; б) $\ln 2$.

8. а) $y''=-2xy$, $y(1)=y'(1)=1$; б) $3y'+2\sin(xy^3)=e^x$, $y(0)=1$.

Варіант 30

1. а) $\dfrac{1\cdot 2}{3!}+\dfrac{5\cdot 5}{5!}+\dfrac{9\cdot 8}{7!}+\ldots$; б) $\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{3}{9}\right)^2+\left(\dfrac{5}{13}\right)^3+\ldots$;

   в) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{7}+\dfrac{3^2}{12}+\ldots$

2. а) $-\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{10}-\dfrac{5}{13}+\ldots$; б) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{7}-\ldots$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n\cdot(x+2)^n}{n^2+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{4^n\cdot(2n+1)}$.

4. $f(x)=\sqrt{x}$, $a_0=9$.

5. $f(x)=e^{\sqrt[3]{x+1}}$.

6. а) $f(x)=\sqrt[4]{16-5x}$; б) $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$.

7. а) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$; б) $\sin 15°$.

8. а) $y'=x^2y^2-e^x$, $y(0)=0$; б) $y''-x^2y'=6x-3x^4$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$.

ПРИКЛАДИ ТЕСТІВ

Теоретичні питання

1. Необхідна ознака збіжності знакосталого числового ряду $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l$, де l дорівнює…

a) ∞; b) 1; c) $1/2$; d) 0.

Відповідь: d).

2. Достатня ознака Д'Аламбера збіжності числового ряду $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ виконується, коли l…

a) $l<0$; b) $l>1$; c) $l<1$; d) $l<\infty$.

Відповідь: c).

3. Інтервал збіжності степеневого ряду шукають за допомогою ознак…

a) Д'Аламбера; b) інтегральної ознаки Коші;

c) радикальної ознаки Коші; d) першої ознаки порівняння.

Відповідь: a).

4. Радіус збіжності степеневого ряду знаходять із співвідношення…

a) $R=\lim\limits_{n\to 0}\frac{a_n}{a_{n+1}}$; b) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; c) $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|}}$; d) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Відповідь: d).

5. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду виконується, коли…

a) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$, $|u_n|>|u_{n+1}|$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$, $|u_n|\ge|u_{n+1}|$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}$, $|u_n|<|u_{n+1}|$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, $|u_n|\le|u_{n+1}|$.

Відповідь: a).

6. Ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ збіжний, коли…

a) $\alpha \le 1$; b) $\alpha > 1$; c) $\alpha \ge 0$; d) $\alpha \ge \infty$.

Відповідь: b).

7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ збіжний, коли

a) $|q| < 1$; b) $|q| \ge 1$; c) $|q| \ge 0$; d) $|q| < \infty$.

Відповідь: a).

8. Який ряд називається знакопереміжним:

a) ряд, у якого всі члени додатні;

b) ряд, у якого члени вільно змінюють знак;

c)ряд, у якого знак змінюється через один член;

d) ряд, у якого всі члени мають від’ємні знаки.

Відповідь: c).

9. Ряд називається заданим, якщо…:

a) відомі перші n членів ряду;

b) відомий загальний член ряду u_n;

c) відома частинна сума S_n ряду;

d) відомі перші три члени ряду.

Відповідь: b).

10. Знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot u_n$ називається абсолютно збіжним, якщо…

a) виконується ознака Лейбніца;

b) збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$;

c) виконується ознака Лейбніца і збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$;

d) не виконується ознака Лейбніца і збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

Відповідь: c).

Практичні завдання

1. Знайти формулу загального члена ряду

$$\frac{6}{2}+\frac{9}{2^2}+\frac{14}{2^3}+\frac{21}{2^4}+\ldots$$

Варіанти відповіді:

a) $\frac{n+4}{2^{n-1}}$; b) $\frac{n^2+5}{2^n}$; c) $\frac{n^3+3}{2^n}$; d) $\frac{n^2+6}{2^{n+1}}$.

2. Заданий загальний член ряду $u_n=\frac{n^n}{n!}$. Знайти u_{n+1} член ряду.

Варіанти відповіді:

a) $\frac{n^{n+1}}{n!+1}$; b) $\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}$; c) $\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$; d) $\frac{(n+1)^n}{n(n+1)!}$.

3. Дослідити, чи виконується необхідна умова збіжності для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6n-5}$.

a) 1; b) $1/6$; c) 0; d) ∞.

4. Використовуючи ознаку порівняння, дослідити на збіжність ряди:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

5. Який з наведених рядів можна дослідити на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$.

6. Радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n}$ дорівнює…

a) 4; b) 3; c) 2; d) $1/2$.

7. Який з наведених рядів можна дослідити на збіжність за допомогою радикальної ознаки Коші:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+4}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)\cdot 2^n}$.

Відповіді:

1. – b); 2. – c);3. – b); 4. – a); 5. – c); 6. – b); 7. – a).

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учеб. пособ. для втузов / Н. С. Пискунов. 13-е изд. – М.: Наука; 1980. – Т. 2. - 560 с.

2. Овчинников, П. П. Вища математика [Текст]: підручник. / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К.: Техніка, 2000. Ч. 2. – 592 с.

3. Смирнов, В. М. Курс высшей математики [Текст] / В. М. Смирнов. – М.: Просвещение, 1974. – Т. 2.

4. Берман, Г. И. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / Г. И. Берман. – М.: Наука, 1985.

5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П. Е Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980. – Ч. 2.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Є. А. Макаренков, Н. Г. Наріус,
Г. А. Папанов, В. І. Самарський

Р Я Д И

Модульне навчання

Методичні вказівки до виконання модульної роботи № 8
«Ряди та їх застосування»

Редактор *Т. В. Мацкевич*

Комп'ютерна верстка *Т. В. Шевченко*

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 2,3. Обл.-вид. арк. 3,2.
Тираж 100 пр. Зам. № 787.

Видавництво Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Свідоцтво суб'єкта видавничої діяльності ДК № 1315 від 31.03.2003

Адреса видавництва та дільниці оперативної поліграфії:
49010, Дніпропетровськ, вул. Лазаряна, 2; www.diitrvv.dp.ua