МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Кафедра «Вища математика»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 4

Укладачі: І. В. Клименко
В. В. Кравець
Н. Г. Наріус
С. П. Русу

Для студентів I курсу денної форми навчання усіх спеціальностей

Дніпропетровськ 2008

УДК 517.3

Укладачі:
Клименко Ірина Володимирівна
Кравець Віктор Володимирович
Наріус Надія Григорівна
Русу Сергій Павлович

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. М. Кисельова* (ДНУ)
канд. техн. наук, доц. *В. І. Шинкаренко* (ДІІТ)

Диференціальне числення: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 4 / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. імені акад. В. Лазаряна; Уклад.: І. В. Клименко, В. В. Кравець, Н. Г. Наріус, С. П. Русу; За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. В. В. Кравця. – Д., 2008. – 53 с.

Методичні рекомендації призначаються для студентів першого курсу денної форми навчання усіх спеціальностей. Містять основний теоретичний матеріал розділу, приклади розв’язування типових задач, варіанти індивідуальних домашніх завдань. Пропонується для підготовки до поточного контролю, а також до модульної контрольної роботи.

Іл. 9. Табл. 1. Бібліогр.: 7 назв.

© Кравець В. В. та ін., укладання, 2008
© Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. імені акад. В. Лазаряна, редагування, оригінал-макет, 2008

ВСТУП

При модульній системі навчання розділ «Диференціальне числення» є одним із системи модулів, в яких закладені основні розділи дисципліни «Вища математика». Ці розділи об'єднані в модулі із врахуванням відведених кредитів на вивчення усього курсу вищої математики.

З метою контролю вивчення та опанування основ вищої математики кожен модуль є заліковим з обов'язковим оцінюванням якості засвоєного матеріалу студентами згідно прийнятої в університеті бальної системи.

Засобами діагностики успішності навчання є комплекти тестових завдань для складання контрольних заходів (поточний контроль, модульний контроль, залік, екзамен).

Пропонується наступний розподіл основних розділів курсу вищої математики на модулі:

1 курс

М 1 (І семестр, 1-а половина)	Елементи векторної і лінійної алгебри.
М 2 (І семестр, 2-а половина)	Елементи аналітичної геометрії.
М 3 (ІІ семестр, 1-а половина)	Функції, границя, неперервність функцій.
М 4 (ІІ семестр, 2-а половина)	Диференціальне числення.

2 курс

М 5 (ІІІ семестр, 1-а половина)	Невизначений інтеграл.
М 6 (ІІІ семестр, 2-а половина)	Визначений інтеграл.
М 7 (IV семестр, 1-а половина)	Звичайні диференціальні рівняння.
М 8 (IV семестр, 2-а половина)	Ряди.

I. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Диференціальне числення – розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

1. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

1.1. Похідна функції однієї змінної

Нехай задано функцію $y = f(x)$, визначену на інтервалі $(a;b)$. Надамо аргументу $x \in (a;b)$ приріст Δx, $x + \Delta x \in (a;b)$. Знайдемо відповідний йому приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ і запишемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо ця границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ і позначають $f'(x)$ або y', f'_x, y'_x, $\frac{dy}{dx}$.

Означення. ***Похідною функції*** $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Операція знаходження похідної називається диференціюванням. Значення похідної в точці $x = x_0$ позначається $f'(x_0)$, або $y'\big|_{x=x_0}$, або $y'(x_0)$.

1.2. Геометричний та фізичний зміст похідної

Задача 1. Нехай тіло M рухається нерівномірно вздовж прямої Ox. Визначити швидкість його руху в кожний момент часу.

Розв'язок. Кожному значенню часу t відповідає віддаль $OM = S$ від деякої фіксованої точки O, тобто $S = S(t)$ (рис. 1).

Задача 2. Задане рівняння кривої $y = f(x)$. Знайти рівняння дотичної і нормалі, проведених до неї в точці M .

Дотичною до кривої в точці M називається граничне положення MT січної MM_1, якщо точки M_1 січної необмежено наближається вздовж кривої до точки M (рис. 2).

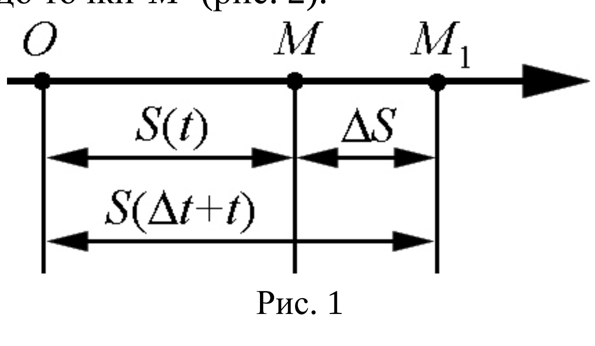

Рис. 1

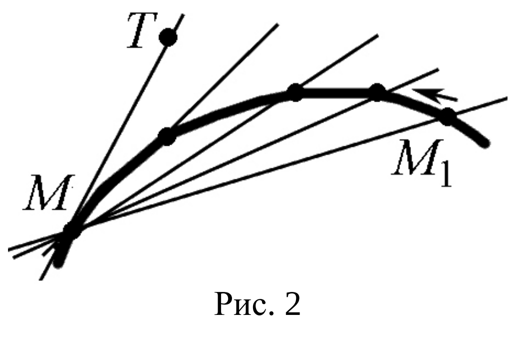

Рис. 2

Нормаллю до кривої (або поверхні) в заданій точці M називається пряма (або площина), яка проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної прямої (або площини) в цій точці кривої (поверхні).

Розв'язок. Рівняння прямої, що проходить через задану точку M має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$, де $(x_0; y_0)$ – координати точки M в прямокутній системі координат, k – кутовий коефіцієнт прямої (тангенс кута нахилу її до осі Ox).

Нехай $y = f(x)$ – неперервна крива, що має в точці M дотичну (не вертикальну) (рис. 3).

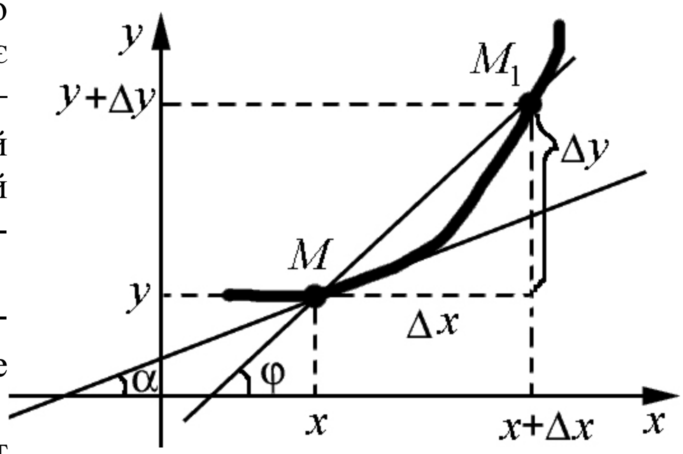

Рис. 3

Знайдемо кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут, який утворює дотична з віссю Ox. Для цього проведемо січну MM_1 і позначимо через φ кут, який утворює січна з віссю Ox. Кутовий коефіцієнт k_c січної визначається співвідношенням

$$k_c = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi.$$

При $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$, тому що крива $y = f(x)$ неперервна і точка M_1 необмежено наближається до точки M по кривій і січна займає положення дотичної.

Тоді $\varphi \to \alpha$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$, отже

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Рівняння дотичної в точці $M(x_0; y_0)$ запишеться у вигляді

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

а рівняння нормалі в цій точці буде

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Завдання для самоперевірки

1. Дати означення похідної функції.
2. Охарактеризувати символи $f'(x)$ і $f'(x_0)$.
3. Який геометричний і фізичний зміст похідної?
4. Довести, користуючись означенням похідної, що $(3x^2 - 5x + 2)' = 6x - 5$.
5. Вивести рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$.

6. Як визначити кут між лініями?

7. Дотична до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ нахилена до осі Ox під кутом 45°. Чому дорівнює $f'(x_0)$?

8. Дати означення правої і лівої похідної. Який зв'язок між односторонніми похідними і похідною функції в точці?

9. Дати означення диференційованої функції в точці і на проміжку.

10. Який клас функцій ширше: неперервних в точці $x = x_0$ чи диференційованих в точці? Навести приклади.

11. Що можна сказати про кут, який утворює дотична з віссю Ox, якщо $f'(x) > 0$, $f'(x) = 0$, $f'(x) < 0$?

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^2$ за означенням.

Розв'язок. 1. Надамо аргументу x приріст Δx: $x + \Delta x$.

2. Знайдемо приріст Δy функції $y = x^2$:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

3. Запишемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

4. Знайдемо границю відношення $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Відповідь: $y' = 2x$, якщо $y = x^2$, або $(x^2)' = 2x$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sin x$ за означенням.

Розв'язок. Послідовно перейдемо від x до $x + \Delta x$, тоді $\Delta y = \sin(x + x_0) - \sin x$; відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\dfrac{(x+\Delta x) - x}{2} \cdot \cos\dfrac{(x+\Delta x) + x}{2}}{\Delta x} =$$
$$= \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos\dfrac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x};$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Відповідь: $(\sin x)' = \cos x$.

Приклад. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3$ в точці $A(2;8)$.

Розв'язок. В цьому випадку рівняння дотичної має вигляд $y-8=f'(2)(x-2)$, оскільки $x_0=2$, а $y_0=8$.

Знайдемо спочатку $f'(x)$: $\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3$;

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right]=3x^2.$$

Значення похідної заданої функції в точці $x_0=2$ $y'\big|_{x=2}=y'(2)=$ $=3x^2\big|_{x=2}=3\cdot 4=12$.

Рівняння дотичної буде $y-8=12(x-2)$ або в загальному вигляді $12x-y-16=0$.

Остаточно рівняння нормалі в т. $M(2;8)$ має вигляд $y-8=-\frac{1}{12}(x-2)$ або у загальному вигляді $x-12y-98=0$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти похідну функції $y=C$ (C – стала величина) за означенням.
2. Знайти похідну функції $y=\cos x$.
3. Знайти похідну функції $y=x^2+1$ в точці $x=5$.
4. Закон руху точки виражається формулою $S=t^3+3t+1$, де S – шлях в метрах. Знайти середню швидкість руху на проміжку часу від $t_0=1$с до $t_1=5$с та швидкість в момент часу $t_0=1$с.
5. Знайти довжину відрізку дотичної до кривої $y=x^3$ від точки перетину її з віссю Ox до точки дотику $A(2;8)$.
6. Знайти кут між лініями $y=x^3+3x^2+2x$ і $y=-5x-5$.
7. Знайти за означенням похідну функції $y=e^x$.
8. Знайти кут між кривими $y=\sin x$ і $y=\cos x$.
9. Знайти $f'(x_0)$ за означенням, якщо $f(x)=\cos 2x$, $x_0=0$
10. Знайти $f'(t_0)$ за означенням, якщо $f(t)=4x^2-3x+8$, $t_0=1$.

Домашнє завдання

1. Знайти за означенням похідну функції $y=5x^3-2x+7$.
2. Знайти похідну функцій $y=\cos 5x$; $y=\sin 5x$; $y=3x^2$.
3. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3$ в точці $x_0=-2$.
4. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=2x-x^2$ в точках пе-

ретину її з віссю Ox.

1.3. Диференціювання функцій однієї змінної

1.3.1. Основні правила

Теорема. Похідна алгебраїчної суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій.

Доведення. Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ диференційовані функції на інтервалі $(a;b)$. Позначимо $y=u+v$. Тоді за означенням похідної

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\right]-\left[u(x)+v(x)\right]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]+\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

Доведення $(u-v)'=u'-v'$ аналогічне.

Отже, $\boxed{(u\pm v)'=u'\pm v'}$.

Теорема. Похідна добутку двох функцій $(u\cdot v)$ дорівнює добутку похідної першого співмножника (u') на другий (v) плюс добуток першого (u) на похідну другого (v'): $\boxed{(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'}$.

Доведення. Використовуючи означення похідної при $y=u\cdot v$, маємо:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x)+\Delta u\right]\left[v(x)+\Delta v\right]-u(x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x)v(x)+v(x)\Delta u+u(x)\Delta v+\Delta u\Delta v\right]-u(x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\Delta v+v(x)\Delta u+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'\cdot v+v'\cdot u,$$

оскільки $\Delta v\to 0$.

Теорема. Похідна частки двох функцій $\left(\dfrac{u}{v}\right)$ дорівнює дробу, чисельник якого є різниця $(u'\cdot v-v'\cdot u)$, а знаменник дорівнює v^2 ($v\neq 0$), тобто

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}}.$$

Доведення. Позначимо $y = \dfrac{u}{v}$. За означенням похідної

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}.$$

Приведемо до спільного знаменника, зробимо тотожні перетворення і одержимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2},$$

оскільки $\Delta v \to 0$.

Теорема. Якщо $y = f(x) = C$ ($C = \mathrm{const}$), то

$$\boxed{f'(x) = C' = 0}.$$

Доведення. Для довільних x і $\Delta x \neq 0$ маємо $f(x) = C$ і $f(x+\Delta x) = C$, тому $\Delta y = 0$, отже і границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Теорема. Сталий множник можна виносити за знак похідної

$$\boxed{(Cu)' = Cu'}.$$

Доведення. Відомо, що $(Cu)' = C' \cdot u + Cu' = 0 \cdot u + C \cdot u' = Cu'$.

Теорема. Похідну степеневої функції $y = x^n$ знаходять за формулою

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}.$$

Доведення. Застосуємо еквівалентність $(1+t)^n - 1 \sim nt$ при $t \to 0$. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n \cdot n\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = n \cdot x^{n-1}.$$

Теорема. Похідну показникової функції $y = a^x$ знаходять за формулою

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}.$$

Доведення. Скористаємось еквівалентністю $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$ при $\alpha \to 0$. Тоді

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\Delta x\ln a}{\Delta x} = a^x\ln a\,.$$

Теорема. Похідну логарифмічної функції $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) знаходять за формулою

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e}\,.$$

Доведення. Скориставшись еквівалентністю $\log_a(1+t)\sim t\log_a e$, при $t\to 0$ одержимо

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{x} = \frac{1}{x}\log_a e\,.$$

Як наслідок $$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}\,.$$

Завдання для самоконтролю

1. Вивести формули диференціювання суми, різниці, добутку і частки двох функцій. Навести приклади.

2. Вивести формули диференціювання степеневої, показникової, логарифмічної функції.

Приклад. Вивести похідну функції $y=\operatorname{tg}x$.

Розв'язок. Запишемо $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ і знайдемо похідну частки, скориставшись виведеними раніше співвідношеннями $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$.

$$(\operatorname{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Отже $\boxed{(\operatorname{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

Приклад. Вивести похідну функції $y=\operatorname{ctg}x$.

Розв'язок. Запишемо $y=\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ і знайдемо похідну частки функцій $\cos x$ і $\sin x$

$$y' = (\mathrm{ctg}\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{(\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже $\boxed{(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Приклад. Знайти $\left(\frac{u}{C}\right)'$.

Розв'язок. $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'\cdot C - u\cdot C'}{C^2} = \frac{1}{C}u'$.

Приклад. Знайти $\left(\frac{C}{v}\right)'$.

Розв'язок. $\left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{C'\cdot v - C\cdot x'}{v^2} = -\frac{C\cdot v'}{v^2}$.

Приклад. $y = 2\cos x\cdot\sin x + \frac{x}{x^2+1}$. Знайти y'.

Розв'язок.

$$y' = \left(2\cos x\cdot\sin x + \frac{x}{x^2+1}\right)' = \left(2\cos x\cdot\sin x\right)' + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' =$$

$$= 2(\cos x\cdot\sin x)' + \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= 2\left[(\cos x)'\sin x + \cos x(\sin x)'\right] + \frac{(x^2+1) - x(2x+0)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= 2\left[-\sin^2 x + \cos^2 x\right] + \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = 2\cos 2x + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

В цьому прикладі використані правила диференціювання добутку, частки, суми двох функцій, похідні тригонометричних функцій і степеневої функцій, а також $(x)' = 1$.

Завдання для аудиторної роботи

Користуючись основними правилами диференціювання знайти похідні функцій, заданих явно:

1) $y = \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $y = (x^4 - x)(3\,\mathrm{tg}\,x - 1)$;

3) $y = x^3 \log_2 x$; 4) $y = 5\cdot 2^x + \frac{3}{4}\operatorname{ctg} x$;

5) $y = x\sqrt[4]{x} + 3\sin 1$; 6) $y = \sqrt[5]{x}\sin x - \frac{\ln x}{x^2}$;

7) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; 8) $y = -10\operatorname{tg} x + 7e^x$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \sqrt{7}x$; 10) $y = ax^2 + bx + c$;

11) $y = \frac{1+e^t}{1-e^t}$; 12) $u = \frac{21^v}{21^v + 1}$.

Домашнє завдання

Знайти похідні:

1) $y = 4x^2 - 3x + 5$; 2) $y = x\sqrt[3]{x^2} - \frac{\sqrt[4]{x}}{3}$; 3) $y = x^3\operatorname{tg} x - 10x$;

4) $y = \frac{1}{3}x^3\sin x$; 5) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x+1}$; 6) $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$;

7) $y = \frac{1}{5}x^5\ln x - \frac{1}{8}x^8 + 5$; 8) $y = 2x^2\ln x - x^4$.

1.3.2. Диференціювання складеної функції

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – дві довільні функції, $u \in A$, а $x \in B$, де A і B – області визначення. Значення $u = \varphi(x)$ при будь-яких $x \in B$ належать області A, $\varphi(x) \in A$. Тоді $y = f\left[\varphi(x)\right]$.

Функцію, яка одержана «накладанням» двох і більше функцій, будемо називати ***складеною***.

Наприклад $y = \log_5(x+3)$, тут накладені дві функції $y = \log_5 u$, $u = x + 3$.

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u, то складена функція $y = f\left[\varphi(x)\right]$ має похідну y'_x в точці x

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Доведення. Функція $y = f(u)$ диференційована і можна записати

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha, \text{ де } \alpha \to 0,\ \Delta u \to 0.$$

Функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x і тому $\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x + \beta$. Отже, після підстановки значення Δu одержимо $\Delta y = y'_u \cdot u'_x\Delta x + u'_x\alpha\Delta x + \alpha\beta\Delta x$, а $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x + \alpha u'_x + \alpha\beta$, або $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$ і $\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$.

Приклад. $y = \log_5(x^2+3)$.

Розв'язок. $y'_x = \frac{1}{x^2+3}\log_5 e \cdot (x^2+3)' = \frac{1}{x^2+3}\log_5 e \cdot (2x)$.

Приклад. $y = \sin^3 x$.

Розв'язок. Тут $u = \sin x$ і $y = u^3$, а $y'_x = (u^3)'_u \cdot (\sin x)'_x = 3u^2 \cos x =$ $= 3\sin^2 x \cdot \cos x$.

Приклад. $y = \ln(\operatorname{tg} x^3)$.

Розв'язок.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3}(\operatorname{tg} x^3)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3}(x^3)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2.$$

Тут $y = \ln u$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = x^3$ і остання операція є знаходження логарифма, тоді

$$y'_x = (\ln u)'_u (\operatorname{tg} v)'_v (x^3)'_x.$$

Приклад. $y = \operatorname{tg}^7(x^3+4)$.

Розв'язок.

$$y' = 7\operatorname{tg}^6(x^3+4) \cdot \left[\operatorname{tg}(x^3+4)\right]' = 7\operatorname{tg}^6(x^3+4) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3+4)} \cdot 3x^2.$$

1.3.3. Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій, тобто: ***областю визначення функції*** $\varphi(y)$ є множина значень функції $f(x)$, а множина значень $\varphi(y)$ є областю визначення $f(x)$.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a;b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в цьому інтервалі, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, і

$$\boxed{\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}}.$$

Тобто, похідні взаємно обернених функцій – обернені за величиною.

Теорема. Похідні від обернених тригонометричних функцій знаходять за формулами

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}; \quad \boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}};$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}; \quad \boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}.$$

Доведення. Функція $y = \arcsin x$, де $x \in [-1;1]$ – є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функція $x = \sin y$ зростає і $x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0$, тоді за умовою теореми про похідну оберненої функції:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ і умова теореми виконується ($x = \operatorname{tg} y$ зростає), $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y$. Тоді $(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

Доведення інших співвідношень аналогічне.

1.3.4. Похідна функції, заданої параметрично

Нехай задані дві функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ однієї змінної t, визначені на одному і тому ж проміжку. В цьому випадку говорять, що ***функція задана параметрично***, а t – параметр.

Якщо $x = \varphi(t)$ строго монотонна, то вона має обернену функцію $t = \Phi(x)$ і $y = \psi[\Phi(x)]$ – складена функція.

Тоді похідна складеної функції

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'(t)\Phi'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Отже,
$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}.$$

Приклад. Задано
$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$$

Знайти y'_x.

Розв'язок. Згідно виведеного співвідношення

$$y'_x = \frac{(3\sin t)'}{(2\cos t)'} = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg} x.$$

Приклад. Скласти рівняння дотичної до циклоїди

$$x = t - \sin t;\; y = 1 - \cos t$$

в точці $M(x_0; y_0)$, яка відповідає параметру $t = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язок. Координати т. M :

$$x_0=(t-\sin t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1;$$

$$y_0=(1-\cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1-\cos\frac{\pi}{2}=1.$$

Похідна в точці M буде

$$y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,$$

а рівняння дотичної $$y-1=1\left[x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right],$$

або $$y=x+2-\frac{\pi}{2}.$$

1.3.5. Диференціювання неявно заданої функції

Нехай задана функція у вигляді рівняння $F(x,y)=0$.

Щоб диференціювати неявно задану функцію, потрібно знайти похідну обох частин рівності по x, вважаючи y складеною функцією (від x). Потім із одержаного рівняння виразити y'.

Приклад. Знайти y', якщо задана функція $x^2+y^2-2y+3x=1$.

Розв'язок. Згідно правила диференціювання неявної функції

$$(x^2+y^2-2y+3x)'=(1)'\Rightarrow 2x+2y\cdot y'-2y'+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y\cdot y'-2y'=-3-2x;\quad y'(2y-2)=-3-2x;\quad y'=-\frac{3+2x}{2(y-1)}.$$

1.3.6. Логарифмічне диференціювання Похідна показниково-степеневої функції

При знаходженні похідної деяких функцій доцільно застосовувати логарифмування. Для диференціювання показниково-степеневої функції $y=u^v$, де $u=u(x)$ і $v=v(x)$ логарифмування обов'язкове. Виведемо співвідношення для похідної цієї функції:

$$y=u^v;\ \ln y=\ln u^v\ \ \ln y=v\ln u.$$

Знайдемо похідну неявної функції $\ln y$ зліва і похідну добутку функцій – справа.

$$(\ln y)'=(v\ln u)';\ \frac{1}{y}y'=v'\ln u+v(\ln u)';\ y'=y\left(v'\ln u+v\frac{1}{u}u'\right),$$

або $$y' = u^v\left(\ln u \cdot v' + \frac{v}{u}u'\right).$$

Нарешті $$\boxed{y' = u^v \ln u \cdot v' + u^{v-1} \cdot v \cdot u'}.$$

Приклад. $y = x^{\sin 5x}$.

Розв’язок. Тут $u = x$; $v = \sin 5x$.

$$y' = x^{\sin 5x} \ln x \cdot (\sin 5x)' + x^{\sin 5x - 1} \cdot \sin 5x (x)' =$$
$$= 5x^{\sin 5x} \ln x \cdot \cos 5x + x^{\sin 5x - 1} \cdot \sin 5x .$$

Приклад. $y = \dfrac{x^3 e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$.

Розв'язок. Логарифмуємо функцію, а потім знайдемо похідну неявної функції:

$$\ln y = 3\ln x + \ln(e^x) - \ln(x-1) - \ln\sqrt{3x+5};$$
$$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{x} + \frac{1}{e^x}\cdot e^x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{3x+5}}\left(\sqrt{3x+5}\right)';$$
$$y' = \frac{x^3 e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\left(\frac{3}{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3x+5}}\frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}}(3x+5)'\right);$$
$$y' = \frac{x^3 e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\left(\frac{3}{x} + 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{3x+5}\right).$$

1.3.7. Таблиця похідних

Зведемо всі виведені співвідношення в таблицю похідних.

Правила диференціювання

1) $y = f(u)$; $u = u(x)$; $y'_x = y'_u \cdot u'_x$;

2) $y = y(t)$; $x = x(t)$; $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$;

3) $(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$;

4) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

5) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$;

7) $(C)' = 0$;

8) $(Cu)' = C \cdot u'$.

Таблиця похідних

1) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;

3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$;

5) $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; 8) $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; 9) $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10) $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 11) $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12) $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 13) $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Завдання для самоконтролю

1. Вивести формулу диференціювання складеної функції. Навести приклад.
2. Вивести формулу диференціювання оберненої функції.
3. Вивести формулу диференціювання параметрично заданої функції.
4. Як диференціювати неявно задану функцію? Приклад.
5. Навести приклад логарифмічного диференціювання.
6. Вивести формули похідних основних елементарних функцій.
7. Довести, що $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(a^x)' = a^x \ln a$ методом логарифмічного диференціювання.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти похідні:

1) $x(2-x)^2$; 2) $\dfrac{3}{3x+5} - \dfrac{2}{x}$; 3) $\dfrac{x^3-1}{x^5+1}$;

4) $\left(\sin\dfrac{x}{4} - \cos\dfrac{x}{4}\right)^2$; 5) $(2x-1)\,\mathrm{ctg}(x+5)$; 6) $\mathrm{tg}\, 3x + \dfrac{3}{4}\mathrm{tg}^2\, 4x$;

7) $\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2$; 8) $\ln\left(\mathrm{ctg}\, x + \dfrac{1}{\sin x}\right)$; 9) $\cos^2 3x + 3^{1-x}$;

10. $y\cos xy = x^2 + 3$; 11) $\ln(x^2 + 2y) = 2x$; 12) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin 2t; \end{cases}$

13) $y = x^{\ln x}$; 14) $y = \dfrac{(1-x^2)\cos^6 6}{\sqrt[7]{x^5}}$; 15) $y = (\mathrm{tg}\, x)^{\cos x}$.

Домашнє завдання

1. Знайти похідні:

1) $y = \dfrac{x+e^{3x}}{x-e^{3x}}$; 2) $y = \arccos\sqrt{x}$; 3) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\mathrm{ctg}\, x + 1} + \dfrac{\cos^2 x}{\mathrm{tg}\, x + 1}$;

4) $x^3 + y^3 = \sin(x-2y)$; 5) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

2. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = \sin x$ в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

3. Знайти кути між кривими $y^2 = 2x$ і $x^2 + y^2 = 8$.

1.3.8. Похідні вищих порядків

Нехай на інтервалі (a,b) задана функція $y = f(x)$. Тоді її похідна y' також є функцією від x і вона теж може мати похідну на інтервалі (a,b) або в деякій точці $x \in (a,b)$. Цю похідну називають ***другою похідною*** або ***похідною другого порядку***. Позначають її y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, або $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Похідною n-го порядку називають похідну від похідної $(n-1)$ порядку. Позначають її $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$ або $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right]$.

Приклад. Знайти четверту похідну функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$.

Розв'язок. Перша похідна $y' = 5x^4 - 14x + 1$;

– друга похідна $y'' = (y')' = (5x^4 - 14x + 1)' = 20x^3 - 14$;

– третя похідна $y''' = (y'')' = (20x^3 - 14)' = 60x^2$, а

– четверта похідна $y^{(4)} = (y''')' = (60x^2)' = 120x$.

Приклад. Знайти похідну n-го порядку функції $y = e^{ax}$.

Розв'язок. Похідна першого порядку $y' = ae^{ax}$, друга похідна $y'' = a^2e^{ax}$, $y''' = a^3e^{ax}$, $y^{(4)} = a^4e^{ax}$, …, $y^{(n)} = a^ne^{ax}$.

Друга похідна застосовується при дослідженні функцій і побудови графіків. Фізичний зміст другої похідної: якщо перша похідна $S'(t) = V(t)$ - швидкість руху тіла, то $S''(t) = V'(t) = a(t)$ можна тлумачити як прискорення.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається похідною другого порядку від функції $y = f(x)$? Навести приклад.
2. Що називається похідною n-го порядку? Навести приклад.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти другу похідну, якщо:

1) $y = x(2-x)^2$; 2) $y = \cos^2 3x + 3^{1-x}$; 3) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$;

4) $y = x^2e^{2x}$; 5) $y = x + \sqrt{3-x}$.

2. Знайти похідну n-го порядку $y^{(n)}$, якщо $y=\frac{1}{x}$.

Домашне завдання

1. Знайти другу похідну, якщо

1) $y=(x^2-1)\ln(x-1)$; 2) $y=(3-x^2)\ln^2 x$;

3) $y=x\cos x^2$; 4) $y=\frac{\ln x}{x^3}$.

2. Знайти n-у похідну, якщо $y=e^{2x}$.

2. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

2.1. Диференціал функції та його застосування

Нехай функція $y=f(x)$ диференційована в точці $x\in[a;b]$, тобто

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, $\alpha\to 0$, $\Delta x\to 0$ і $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$.

Означення. ***Диференціалом*** dy ***функції*** $y=f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції:

$$dy=f'(x)\Delta x \text{ або } dy=f'(x)dx,$$

тому що $dx\cong\Delta x$, диференціал x збігається з її приростом.

Геометричний зміст диференціалу пояснимо рисунком 4.

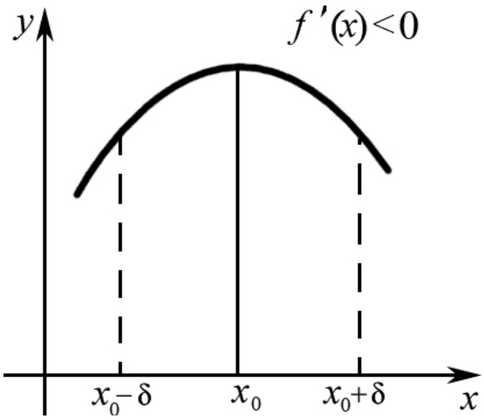

Рис. 4

Оскільки $\Delta y\approx dy$, то при малих Δx

$$\boxed{f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x}.$$

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{1,08}$.

Розв'язок. Розглянемо функцію $y=\sqrt{x}$, $x\in[0;+\infty)$. Скористаємось приведеною вище формулою наближених обчислень.

При $x=1$ $\Delta x=0,08$. $f(1+0,08)\approx f(1)+f'(1)\cdot 0,08$.

При $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ в точці $x=1$ $\sqrt{1,08}\approx\sqrt{1}+\left.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right|_{x=1}\cdot 0,08=$

$=1+\frac{1}{2}\cdot 0,08=1,04$.

Приклад. Обчислити наближено $\operatorname{arctg}1,05$.

Розв'язок. За формулою

$$\operatorname{arctg}(1+0{,}05) \approx \operatorname{arctg}1 + (\operatorname{arctg} x)'\Big|_{x=1} \cdot 0{,}05$$

або $$\approx \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=1} \cdot 0{,}05 = \frac{\pi}{4} + \frac{0{,}05}{2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}811.$$

2.2. Застосування похідних до знаходження границі функції Правила Лопіталя

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в деякому околі точки x_0, причому

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$$

і в околі точки $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя відношення похідних

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то існує і границя відношення функцій

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

і ці границі рівні між собою:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}.$$

Теорема 2. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в деякому околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty,\ \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді, якщо існує границя $$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то існує границя $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

і $$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}.$$

Зауваження. Правила Лопіталя застосовуються лише для розкриття невизначеностей вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Невизначеності вигляду

$$\{0\cdot\infty\},\ \{\infty-\infty\},\ \{\infty^0\},\ \{1^\infty\}$$

алгебраїчними перетвореннями зводяться до основних $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0} \varphi\left(x\right)=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-\varphi(x)\right]=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=0$, то $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\left[\varphi(x)\ln f(x)\right]}}$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Розв'язок. Підставимо в функції $f(x)=\ln x$ і $\varphi(x)=x$ граничне значення аргументу x і одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\};$$

застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5e^{5x}-2e^{2x}}{1}=\dfrac{3}{1}=3.$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{4}=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{4}}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\mathrm{ctg}\dfrac{\pi x}{4}}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{\dfrac{\pi}{4}\left(-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{4}}\right)}=\frac{4}{\pi}.$$

В цьому прикладі спочатку звели невизначеність $\{0\cdot\infty\}$ до вигляду $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, а потім застосували правило Лопіталя.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{1}{\cos x}\right)=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

В цьому прикладі звели невизначеність $\{\infty-\infty\}$ до вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, а потім застосували правило Лопіталя.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язок. Маємо невизначеність $\{1^{\infty}\}$. Скористаємось співвідношенням

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\ln\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x}.$$

Знайдемо значення показника:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x=\{\infty\cdot 0\}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=-2\cdot 1\cdot 1=-2.$$

Отже $$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається диференціалом функції?
2. Як визначається диференціал функції через її похідну?
3. Який геометричний зміст диференціала?
4. Вивести формулу наближеного обчислення функції.
5. Записати властивості диференціала, користуючись відповідними властивостями похідної:

$$dC,\quad d(Cu),\quad d(u\pm v),\quad d(u\cdot v),\quad d\left(\frac{u}{v}\right).$$

6. В чому суть правил Лопіталя?
7. Сформулювати теореми про розкриття невизначеностей $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Навести приклади.
8. Як розкриваються невизначеності

$$\{\infty\cdot 0\},\ \{\infty-\infty\},\ \{\infty\cdot 0^0\},\ \{\infty^0\},\ \{1^\infty\}?$$

Навести приклади.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти диференціали функцій:

1) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+8\arcsin\dfrac{x}{4}$; 2) $y=\arccos\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

2. Обчислити $\operatorname{tg}46^\circ$.

3. Знайти границі

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{5x+e^x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-2}-\operatorname{ctg}^2 x)$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\sin x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+3x^2-1}{3x-\operatorname{tg}^3 x}$.

Домашнє завдання

1. Знайти границі за правилом Лопіталя

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^3-x^5}{4x-x^4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{-x}}{\ln(1+2x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x^2}}$. 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$.

II. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ

Дослідити функцію, задану аналітичним виразом $y=f(x)$, означає визначити такі її характеристики: область визначення; парність чи непарність; періодичність; монотонність; екстремуми; найбільше і найменше значення в заданому відрізку. Якщо є точки розриву функції, то необхідно дослідити її поведінку поблизу цих точок.

Для графічного зображення функції необхідно додатково визначити: точки перетину графіка з осями координат; опуклість його; точки перегину;

асимптоти.

Означення 1. Якщо кожному значенню x з деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то кажуть, що y є ***функція*** від x і записують $y = f(x)$.

Означення 2. Сукупність значень x, при яких функція y існує, називається ***областю визначення функції***.

Означення 3. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в області, симетричній відносно початку координат. Тоді, якщо

$$f(x) = -f(x),$$

то функція називається ***непарною***, а при

$$f(x) = f(-x)$$

– ***парною***.

Означення 4. Функція називається ***періодичною***, якщо існує таке дійсне число $l \neq 0$, що, при будь-яких значеннях аргументу x із області визначення

$$f(x) = f(x + kl),$$

де k – ціле число, l – період.

Означення 5. Якщо для двох будь-яких різних значень аргументу x_1 і x_2 з області визначення із нерівності $x_1 < x_2$ виконуються нерівності:

$f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається ***зростаючою***,

$f(x_1) \leq f(x_2)$, то – ***не спадною***,

$f(x_1) > f(x_2)$, то – ***спадною***,

$f(x_1) \geq f(x_2)$, то – ***не зростаючою***.

Зростаючі, спадні, не зростаючі, не спадні функції називаються ***монотонними***.

Означення 6. Функція $y = f(x)$ має ***локальний внутрішній максимум*** (мінімум) в точці $x = x_0$, якщо

1) $f(x)$ визначена в точці x_0 і її достатньо малому «δ-околі», тобто $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$;

2) всі значення функції з «δ-околу» менші (більші) ніж її значення в точці x_0, тобто $f(x) < f(x_0)$ $\left[f(x) > f(x_0) \right]$.

Геометричний зміст цього зрозумілий із рис. 5.

Означення 7. Найбільший з максимумів і найменший з мінімумів називають ***найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку***.

Застосуємо диференціювання до визначення монотонності функцій.

Теорема (необхідні умови). Якщо диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ ***зростає*** (спадає), то $f'(x) \geq 0$ $\left[f'(x) \leq 0 \right]$ для $\forall x \in (a;b)$.

Теорема (достатні умови). Якщо функція диференційована на інтервалі $(a;b)$ і $f'(x) > 0$ $\left[f'(x) < 0 \right]$ для $\forall x \in (a;b)$, то ця функція ***зростає*** (спадає) на інтервалі $(a;b)$.

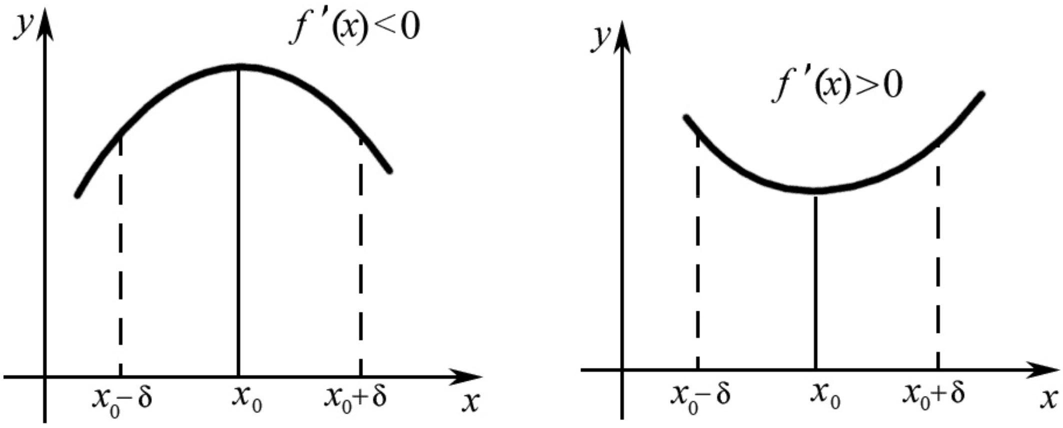

Рис. 5

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, необхідно:

– знайти похідну даної функції;

– знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ і з умови $f'(x)=\infty$;

– розбити критичними точками область існування функції на інтервали;

– визначити знак похідної на кожному інтервалі; якщо похідна додатна – функція зростає, якщо від'ємна – функція спадає в цьому інтервалі.

Щоб дослідити функцію на екстремум необхідно знайти всі її екстремуми.

Теорема (необхідна умова екстремуму). Якщо диференційована функція $y=f(x)$ має екстремум в точці x_0, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0)=0$.

Теорема (достатня умова екстремуму). Якщо неперервна функція $y=f(x)$ диференційована в деякому «δ-околі» критичної точки x_0 і при переході через неї (зліва направо) похідна $f'(x)$ міняє знак з «+» на «-», то x_0 є точкою максимуму; якщо знак похідної змінюється з «–» на «+», то x_0 – точка мінімуму (див. рис. 5).

Отже, щоб дослідити функцію на екстремум, необхідно:

– знайти критичні точки функції із рівняння $f'(x)=0$;

– вибрати серед них внутрішні точки області визначення;

– дослідити знак похідної $f'(x)$ зліва і справа від кожної критичної точки;

– виписати ті точки, де є екстремум;

– знайти значення функції в точках екстремуму.

Для дослідження на екстремум можна скористатись поняттям другої похідної $f''(x)$.

Теорема. Якщо в точці x_0 $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то при $f''(x_0)<0$ функція має в цій точці максимум, а при $f''(x_0)>0$ – мінімум.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку, треба:

– знайти критичні точки функції на відрізку $[a;b]$;

– обчислити значення функції в цих точках;

– обчислити значення функції $f(a)$ і $f(b)$;

– серед обчислених значень вказати найбільше $f_{\max}(x)$ і найменше $f_{\min}(x)$.

Приклад. Дослідити функцію $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на монотонність.

Розв'язок.

Функція визначена при $(-\infty < x < +\infty)$.

Похідна функції $f'(x) = (x^3 - 3x - 4)' = 3x^2 - 3$.

Критичні точки: $f'(x) = 0$, $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

Розіб'ємо область існування на інтервали монотонності: $(-\infty < x < -1) \cup (-1 < x < 1) \cup (1 < x < +\infty)$.

Визначаємо знак похідної і поведінку функції:

1) $-\infty < x < -1$: $f'(x) > 0$ – функція зростає;

2) $-1 < x < 1$: $f'(x) < 0$ – функція спадає;

3) $1 < x < +\infty$: $f'(x) > 0$ – функція спадає.

Графічно:

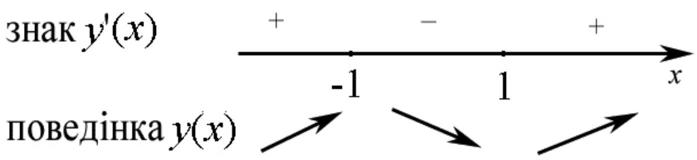

Рис. 6

Приклад. Знайти екстремуми функції $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.

Розв'язок.

Область визначення $-\infty < x < +\infty$.

Критичні точки: $f'(x) = 0$, $f'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 3\right)' = x^2 - 3x + 2$,

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1; 2$.

Точок, де похідна не існує, немає.

За першою похідною:

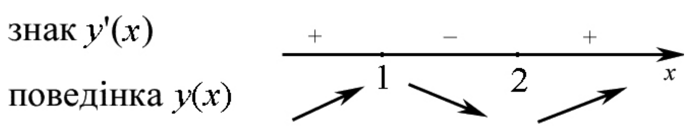

Рис. 7

Отже, точка $x = 1$ є точкою максимуму, а точка $x = 2$ є точкою мінімуму. Значення функції в цих точках: $f_{\max} = f(1) = -\dfrac{13}{6}$, $f_{\min}(x) = f(2) = -\dfrac{7}{3}$. За другою похідною: $f''(x) = 2x - 3$; $f''(1) = -1 < 0$; $f''(2) = 1 > 0$. Отже, в точці $x = 1$ функція дістає максимуму, а в точці $x = 2$ – мінімуму.

Задача. Визначити розміри циліндричного бака об'єму V, при яких на його виготовлення піде найменше матеріалу.

Розв'язок. Нехай радіус основи бака r, а висота його h. Тоді повна поверхня бака $S=2\pi r^2+2\pi rh$. Це функція двох змінних r і h. Виразимо $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$, оскільки об'єм V заданий. Отже, $S=S(r)=2\pi r^2+2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2}$ або $S(r)=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$.

Знайдемо критичні точки:

$$S'(r)=0,\ S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2},\ 2\left(2\pi r-\frac{V}{r^2}\right)=0,\ 2\pi r-\frac{V}{r^2}=0\ \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Знайдемо знак другої похідної $S''(r)=2\left(2\pi+\dfrac{2V}{r^3}\right)>0$ на проміжку $(0;+\infty)$.

Отже в точці $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ функція $S(r)$ має мінімум.

Тоді висота $h=\dfrac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^2}}=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}=2r$.

Відповідь: Висота бака повинна бути вдвічі більшою радіуса основи, щоб на виготовлення бака об'єму V пішло найменше матеріалу.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на відрізку $[-2;1]$.

Розв'язок. Знайдемо критичні точки із рівняння $f'(x)=0$, $f'(x)=(3x^4+4x^3+1)'=12x^3+12x^2$, $12x^3+12x^2=0\ \Rightarrow x_1=x_2=0$, $x_3=-1$.

Точки $x=-1$ і $x=0$ належать проміжку $[-2;1]$, тому знаходимо значення функції в цих точках $f(-1)=3-4+1=0$, а $f(0)=1$. Знайдемо значення функції на кінцях відрізку $f(-2)=48-32+1=17$, $f(1)=8$. Отже, серед цих значень найбільше $f_{\text{найб}}=f(-2)=17$, а найменше $f_{\text{найм}}=f(-1)=0$.

1. Опуклість кривих. Точки перегину

Означення 1. Крива $y=f(x)$ називається ***опуклою на інтервалі***, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче її дотичної на цьому інтервалі.

Означення 2. Крива $y=f(x)$ називається ***увігнутою на інтервалі***, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище її дотичної на цьому інтервалі.

Означення 3. ***Точкою перегину*** називається точка кривої, яка відділяє опуклість від увігнутості.

Інтервали опуклості і увігнутості знаходять за допомогою теореми.

Теорема. Нехай функція $y=f(x)$ є двічі диференційованою на $(a;b)$. Тоді:

– якщо $f''(x)<0$, то крива опукла;

– якщо $f''(x)>0$, то крива увігнута.

В точці перегину $f''(x)=0$ або не існує $f''(x)=\infty$.

Теорема. Нехай x_0 – критична точка другого роду. Якщо при переході через неї $f''(x)$ змінює знак, то точка $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ є точкою перегину кривої.

Отже, щоб знайти точки перегину, необхідно знайти критичні точки другого роду із рівняння $f''(x)=0$ (або ∞) і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

Приклад. Знайти інтервали опуклості, увігнутості та точки перегину кривої

$$f(x)=x^5-x+2.$$

Розв'язок. Область визначення $-\infty<x<+\infty$. Так як $f''(x)=20x^3$, то критична точка другого роду одна - $x=0$. Розбиваємо область визначення на два інтервали $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ і досліджуємо знак другої похідної при переході через цю точку.

Інтервал $(-\infty;0)$ – $f''(x)<0$, крива опукла; $(0;+\infty)$ – $f''(x)>0$, крива увігнута, отже $M(0;2)$ є точкою перегину функції.

2. Асимптоти кривої

Означення. Пряма l називається ***асимптотою*** кривої, якщо відстань δ від змінної точки кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M, рухаючись по прямій, віддаляється в нескінченність.

Розрізняють асимптоти вертикальні і невертикальні (горизонтальні і похилі).

Рівняння вертикальної асимптоти $x=x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, тобто в точках розриву функції завжди є вертикальна асимптота.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд

$$y=kx+b,$$

де
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Рівняння горизонтальної асимптоти $y=b$.

3. План дослідження функції та побудова її графіка

1. Визначаємо область допустимих значень (ОДЗ).
2. Виявляємо, чи є функція парною або непарною, періодичною тощо.
3. Знаходимо точки екстремуму та інтервали монотонності.
4. Знаходимо точки перегину та інтервали опуклості.
5. Знаходимо рівняння асимптот графіка функції (якщо вони є).

Означення цього розділу і план дослідження функції допомагають побудувати її графік.

Приклад. Дослідити функцію $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язок. 1. Функція не визначена в точках $x=-1$, $x=1$. Область її визначення складається з трьох інтервалів $(-\infty;-1)\cup(-1;+1)\cup(+1;+\infty)$, а графік – з трьох гілок.

2. Функція непарна, тому що $y(-x)=\dfrac{-x}{1-(-x)^2}=-\dfrac{x}{1-x^2}=-y(x)$. Отже, графік її симетричний відносно початку координат і для побудови достатньо побудувати його в частині $x\geq 0$.

3. Функція неперіодична.

4. Точки перетину графіка з осями координат: при $x=0$ $y=0$ графік перетинає осі координат в точці $O(0;0)$.

5. Прямі $x=1$ і $x=-1$ є вертикальними асимптотами. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0,\ k=0 \text{ і при } x\to+\infty \text{ і при } x\to-\infty;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[y-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1-x^2}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0.$$

Отже, $y=0$ (вісь Ox) є горизонтальною асимптотою і при $x\to+\infty$, і при $x\to-\infty$.

6. Дослідимо поведінку функції в точках розриву $x=-1$ і $x=1$ та при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1-\varepsilon}{1-(-1-\varepsilon)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1-\varepsilon}{1-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1-\varepsilon}{-2\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1-\varepsilon}{-\varepsilon(2+\varepsilon)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1+\varepsilon}{1-(-1+\varepsilon)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1+\varepsilon}{1-(1-2\varepsilon+\varepsilon^2)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1+\varepsilon}{2\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1+\varepsilon}{\varepsilon(2-\varepsilon)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x^2}=+\infty;\quad \lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x^2}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x^2}=0;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2}=0.$$

7. Знайдемо інтервали монотонності функції:

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.$$

Критичні точки $x_1=-1,\ x_2=+1$ ($y'=\infty$).

Тоді в інтервалі:

$(-\infty;-1)$ $y'>0$ і функція зростає;

$(-1;0)$ $y'>0$ – функція зростає;

$(0;+1)$ $y'>0$ – функція зростає;

$(+1;+\infty)$ $y'>0$ – функція зростає.

8. Дослідимо функцію на екстремум. Для цього $y'\neq 0$, тоді $y'=\infty$ і $x_1=-1,\ x_2=1$ – критичні точки, але вони не належать області визначення функції. Отже, функція не має екстремумів.

9. Дослідимо функцію на опуклість. Знайдемо спочатку другу похідну

$$y'' = \left[\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right]' = \frac{2x(1-x^2)^2-(x^2+1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Точки перегину графіка знайдемо серед тих, де y'' дорівнює нулю або не існує. Це точки $x=-1,\ x=0,\ x=1$. Оскільки точки $x=\pm1$ не належать області існування функції, то при $x=0$ $y=0$, тобто точка $O(0;0)$ є точкою перегину графіка.

За даними дослідження складаємо таблицю і побудуємо графік:

інтервали	$-\infty$	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$	$+\infty$
y'		+	не існує	+	0	+	не існує	+	
y''		+		-	0	+		-	
поведінка функції	$\lim y=0$	$\nearrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cap$	точка перетину $y=0$	$\nearrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cap$	$\lim y=0$

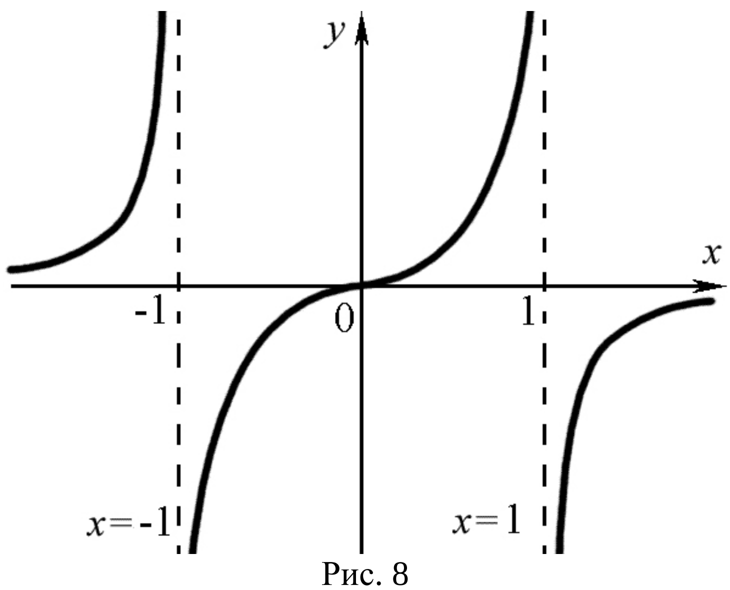

Рис. 8

Завдання для самоконтролю

1. В чому суть правила Лопіталя? Довести теорему про розкриття невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

2. Сформулювати теорему (правило Лопіталя) для випадку невизначеності $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

3. Дати приклади застосувати правила Лопіталя.

4. Як розкрити невизначеності: $\{\infty \cdot 0\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$, $\{1^\infty\}$?

5. Дати приклади розкриття цих невизначеностей.

6. Сформулювати і довести умови строгої монотонності функції на інтервалі.

7. Які точки називаються стаціонарними?

8. У чому полягає правило знаходження інтервалів монотонності?

9. Що називається точкою локального мінімуму функції?

10. Що називається локальним мінімумом? Чому локальним?

11. Що називається локальним екстремумом і чим він відрізняється від абсолютного екстремуму?

12. Сформулювати і довести необхідні умови екстремуму.

13. Сформулювати достатні умови екстремуму.

14. Правила знаходження екстремуму. Дати приклади.

15. Як знайти найбільше і найменше значення функції в інтервалі?

16. Яка крива називається опуклою (увігнутою) на інтервалі?

17. Що називається точкою перегину?

18. Які точки називаються критичними другого року?

19. Сформулювати і довести достатню умову опуклості (увігнутості) кривої. Дати приклади.

20. Яка достатня умова того, що критична точка другого роду є абсцисою точки перегину? Дати приклад.

21. Сформулювати правило знаходження інтервалів опуклості, увігнутості та точок перегину.

22. Що називається асимптотою кривої?

23. Як знайти вертикальну асимптоту?

24. Як знайти невертикальні асимптоти?

25. Записати загальну схему дослідження функції.

Домашнє завдання

1. Знайти інтервали монотонності функцій а) $y = \ln(x^2 + 3)$; б) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Відповідь:

а) функція спадає в інтервалі $(-\infty; 0)$ і зростає на інтервалі $(0; +\infty)$;

б) функція зростає на інтервалі $(-1;1)$ і спадає на інтервалі $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$.

2. Знайти локальні екстремуми $y=\dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$

Відповідь: $y_{\max}=y\left(\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{1}{24}$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=3x-x^3$, $x\in[-2;3]$.
Відповідь: $(-18;2)$.

4. Знайти асимптоти кривої $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

Відповідь: $x=2$, $y=x+1$ при $x\to+\infty$ і $y=-x-1$ при $x\to-\infty$.

5. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ і побудувати графік.

Відповідь: $y_{\min}=y(2)=3$; $x=0$ і $y=x$ - асимптоти.

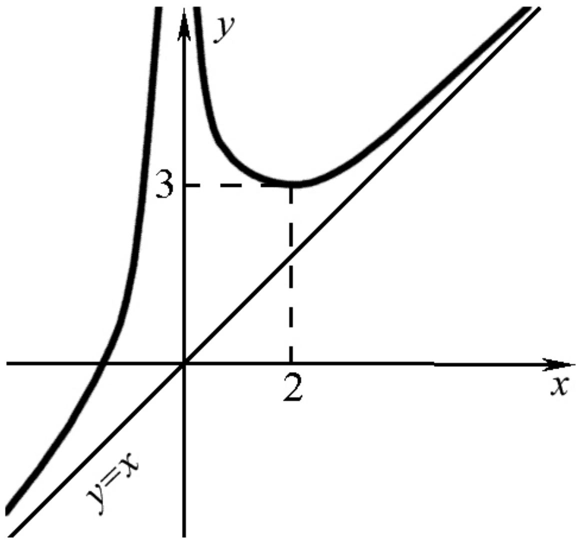

Рис. 9

Завдання для аудиторної роботи

1. Показати, що функція $y=4-3x-x^3$ скрізь спадає.

2. Знайти інтервали монотонності функції $y=2x^3+3x^2-12x+5$.

3. Знайти екстремуми та інтервали монотонності функцій:

а) $y=x^3-3x+5$; б) $y=x-\ln(x+2)$; в) $y=x^2e^{-2x}$.

4. Знайти найбільше і найменше значення функцій на інтервалі:

а) $y=2x^3+3x^2-12x+1$, $x\in[-4;0]$;

б) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$, $x\in[1;3]$;

в) $y=\sin 2x-x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

5. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і увігнутості графіка функції:

а) $y=x^3-3x^2+6x$; б) $y=\ln(4+x^2)$; в) $y=(x+1)e^{x+1}$.

6. Знайти асимптоти ліній:

а) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$; б) $y=2+\ln\dfrac{x+1}{x-2}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$.

7. Дослідити функцію і побудувати її графік:

а) $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$; б) $y=\dfrac{x^2}{2}+\ln x$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

1. Знайти похідну функції за означенням.
2. Знайти похідну функції, застосовуючи правила диференціювання суми, добутку, частки функцій.
3. Знайти похідну складеної функції.
4. Знайти похідну функції $y=u^v$ із застосуванням логарифмічного диференціювання.
5. Знайти похідну функції, заданої параметрично.
6. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=f(x)$ в точці $M(x_0;y_0)$.
7. Знайти границі функцій із застосуванням правил Лопіталя.
8. Дослідити функцію на екстремум та знайти інтервали її монотонності.
9. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку.
10. Дослідити функцію та побудувати її графік.

Варіант 1

1. $y=\ln x$.

2. а) $y=x^3-\frac{1}{5}x^2+2x-4$; б) $y=5\operatorname{arctg}x\cdot\ln x$; в) $y=\dfrac{1+x^8}{\arccos x}$.

3. а) $y=5+3e^{x^2}\operatorname{arctg}4x$; б) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

4. $y=(\cos 2x)^{\ln\cos 2x}$.

5. $\begin{cases} x=\dfrac{3t^2+1}{3t^2} \\ y=\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right)\end{cases}$.

6. $y = x\ln x$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

8. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12$.

9. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$; $[4;0]$.

10. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{4}{x^2}$.

Варіант 2

1. $y = \sin 2x$.

2. а) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; б) $y = \sin 5 \cdot \cos x$; в) $y = \dfrac{x^2+4}{x+1}$.

3. а) $y = 10^{5x^2} \arcsin\sqrt{x} + 1$; б) $y = 2x - \ln(1+\sqrt{1-e^{4x}}) - e^{2x}\arcsin(e^{2x})$.

4. $y = (\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$.

5. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \dfrac{2}{\cos^2 t} \end{cases}$.

6. $y = x^3$; $x_0 = -2$; $y_0 = -8$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x^3 - x^5}{4x - x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

8. $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$.

9. $y = x - 4\sqrt{x} + 1$; $[1;9]$.

10. $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Варіант 3

1. $y = \dfrac{2}{x}$.

2. а) $y = x\sqrt[4]{x} + 3\sin 1$; б) $y = \operatorname{tg} x \cdot e^x$; в) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$.

3. а) $y = \sqrt[5]{x^3} + 5\operatorname{arctg}\dfrac{x}{5} \cdot \lg x$; б) $y = (2x^2+5)\sqrt{x^2+1} + 3\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

4. $y = (\sin x)^{5e^x}$.

5. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}.$

6. $y = 2x - x^2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 0$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 1}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^2}$.

8. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

9. $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$; $[-1;2]$.

10. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Варіант 4

1. $y = \cos 2x$.

2. а) $y = 6x^7 + 4x^3 - \dfrac{1}{8}x$; б) $y = \sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x$; в) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

3. а) $y = 10 + \cos^4 \dfrac{x}{2} \cdot 4^{\cos\frac{x}{2}}$; б) $y = x^4 \arcsin\dfrac{x}{3} + (x^2 + 18)\sqrt{x^2 - 9}$.

4. $y = (\arcsin x)^{e^x}$.

5. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \mathrm{tg}\sqrt{1+t} \end{cases}.$

6. $y = 2x - x^2$; $x_0 = 2$; $y_0 = 0$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{5^x - 4^x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}\,x}$.

8. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

9. $y = x + \dfrac{4}{x^2}$; $[1;3]$.

10. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

Варіант 5

1. $y = 5x - 2$.

2. а) $y = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}$; б) $y = x^3 \arcsin x$; в) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

3. а) $y = \mathrm{tg}^2 \frac{x}{8} \cdot e^{\mathrm{tg}\, 3x}$;   б) $y = x^3 \arcsin x + \frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

4. $y = (\ln 5x)^{\sqrt{x}}$.

5. $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = (t-1)^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$.

6. $y = x - \frac{1}{x}$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0$.

7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} + 3x^2 - 1}{3x - \mathrm{tg}^3 x}$;   б) $\lim\limits_{x \to 0} (\mathrm{ctg}\, x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

8. $y = x^3 + 3x^2 - 5$.

9. $y = \sin 2x - x$; $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

10. $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.

Варіант 6

1. $y = 3x^2$.

2. а) $y = -10\,\mathrm{arctg}\, x - 7e^x$;   б) $y = 2^x \mathrm{arctg}\, x$;   в) $y = \frac{e^x}{\sin x}$.

3. а) $y = 3 + \mathrm{tg}^2 x \cdot \ln(\sin x)$;   б) $y = \sqrt{1+x^2} \cdot \mathrm{arctg}\, x - \ln(x - \sqrt{1+x^2})$.

4. $y = x^{\mathrm{tg}^2 x}$;

5. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$.

6. $y = x - \frac{1}{x}$; $x_0 = -1$; $y_0 = 0$.

7. а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\, x - 1}{\sin 4x}$;   б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{\frac{\pi}{2} - x}$.

8. $y = \sqrt[3]{x} + 3$.

9. $y = \sqrt{21 + 4x - x^2}$; $[-1; 7]$.

10. $y = \frac{3x - 2}{5x^2}$.

Варіант 7

1. $y = x^2 + 2x + 1$.

2. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt{7}x$; б) $y = x^2 \cos x$; в) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^5}$.

3. а) $y = \sin^3 \dfrac{x}{3} \cdot e^{\operatorname{tg} 3x}$; б) $y = 2\arcsin \dfrac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2 + 24x + 12}$.

4. $y = (\operatorname{tg} 7x)^{e^{4x}}$.

5. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$.

6. $y = x^3$; $x_0 = 2$; $y_0 = 8$.

7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1+2x)}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

8. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

9. $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 5}$; $[-1;3]$.

10. $y = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$.

Варіант 8

1. $y = \ln 2x$.

2. а) $y = \sqrt{x} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2}$; б) $y = (2x^2 - x - 1)\arccos x$; в) $y = \dfrac{\log_6 x}{x^2}$.

3. а) $y = 4 - \arccos^3 x \cdot 10^{\sin x}$; б) $y = 3x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{6x}}) - e^{-3x} \arcsin e^{3x}$.

4. $y = x^{\arcsin \sqrt{x}}$.

5. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2) \\ y = \arccos t^3 \end{cases}$.

6. $y = x^3$; $x_0 = 1$; $y_0 = 1$.

7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

8. $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

9. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; $[0;2]$.

10. $y=\dfrac{(x+1)^3}{4(x-2)^2}$.

Варіант 9

1. $y=\sin 3x$.

2. а) $y=\arccos x-3\ln x$; б) $y=\dfrac{1}{3}x^3\sin x$; в) $y=\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x+1}$.

3. а) $y=\operatorname{tg}^6 x\cdot e^{10x}-2$; б) $y=(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

4. $y=(\operatorname{tg}^2 x)^{4\ln x}$.

5. $\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \\ y=\sqrt{t^2+1} \end{cases}$.

6. $y=\operatorname{tg} 2x$; $x_0=0$; $y_0=0$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{4}{x}}$.

8. $y=\dfrac{3}{4}x^4-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+6x-1$.

9. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$; $[0;1]$.

10. $y=\dfrac{x}{e^x}$.

Варіант 10

1. $y=\dfrac{5}{x}$.

2. а) $y=5\cdot 2^x+\dfrac{3}{4}\operatorname{ctg} x$; б) $y=(\sin x-\cos x)^2$; в) $y=\dfrac{1+\cos x}{1+x^6}$.

3. а) $y=5+\lg\sqrt{x}\cdot e^{4x}$; б) $y=\ln\dfrac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\dfrac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}$.

4. $y=(\cos^2 5x)^{e^x}$.

5. $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2-\cos t \end{cases}$.

6. $y=\ln x$; $x_0=1$; $y_0=0$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)^{x^2-1}$.

8. $y=2x^3-3x^2$.

9. $y=x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$; $[-2;2]$.

10. $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$.

Варіант 11

1. $y=x-2$.

2. а) $y=\dfrac{9}{\sqrt[3]{x^2}}-5^x$; б) $y=4(\sin x-x^2)\cos x$; в) $y=\dfrac{4-x^2}{4\operatorname{arctg} x}$.

3. а) $y=10-(\arcsin x)^2\sqrt{e^x-1}$; б) $y=\sqrt{(4+x)(1+x)}+3\ln(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x})$.

4. $y=(\sin x)^x$.

5. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2} \\ y=\arcsin(t-1) \end{cases}$.

6. $y=\dfrac{2}{x}$; $x_0=2$; $y_0=1$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2x^3-\cos 2x}{x^2-\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$.

8. $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

9. $y=x^3(8-x)$; $[0;7]$.

10. $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$.

Варіант 12

1. $y=\cos 3x$.

2. а) $y=\sqrt[5]{x^3}+5\arcsin x$; б) $y=4(\sin x-x^2)\cos x$; в) $y=\dfrac{2x-1}{\operatorname{ctg} x}$.

3. а) $y=\ln^4 x\cdot\arcsin\sqrt{x}$; б) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}$.

4. $y=(\sin x)^{\sin x}$.

5. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt{1-t} \end{cases}$.

6. $y = 2x^2$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x^2} - 1}{\sin^2 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

8. $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$.

9. $y = \dfrac{4 - x^2}{4 + x^2}$; $[-1;3]$.

10. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

Варіант 13

1. $y = 5x^2$.

2. а) $y = 5\sin x + \dfrac{3}{4}\ln x$; б) $y = 4(\sin x - x^2)\cos x$; в) $y = \dfrac{\arccos x}{1 + \sqrt{x}}$.

3. а) $y = 1 + \sin^5 x \cdot \operatorname{tg} 10x$; б) $y = 5x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{10x}}\right) - e^{-5x}\arcsin(e^{5x})$.

4. $y = (x-5)^{\sin^2 x}$.

5. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(e^t) \\ y = \ln(e^t) \end{cases}$.

6. $y = x^2 - x - 2$; $x_0 = 2$; $y_0 = 0$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{5x - \operatorname{tg} 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

8. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

9. $y = x - \sin x$; $[0;2\pi]$.

10. $y = \dfrac{2x}{x^3 - 8}$.

Варіант 14

1. $y = 2x^2 + 3x + 2$.

2. а) $y = 2x^5 - \dfrac{1}{x} + 3\operatorname{tg} x$; б) $y = 2x\cos x + x^2 \sin x$; в) $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$.

3. а) $y = 5^{\cos x} \operatorname{ctg}^2 x$; б) $y = \ln \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}$.

4. $y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}$.

5. $\begin{cases} x = \dfrac{2}{t} \\ y = \sin 2t \end{cases}$.

6. $y = x^2 - x - 2$; $x_0 = -1$; $y_0 = 0$;

7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\sin 2x^2)}{\ln(\sin x^2)}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

8. $y = x^3 - 12x$.

9. $y = 2x - \cos 4x$; $[-\pi; \pi]$.

10. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$.

Варіант 15

1. $y = \ln 3x$.

2. а) $y = \dfrac{7}{\sqrt{x}} - e^x$; б) $y = 3 + \operatorname{tg} x \cdot \ln x$; в) $y = \dfrac{e^x}{\arcsin x}$.

3. а) $y = 20 + \arcsin \sqrt{x} \cdot e^{\sin 10x}$; б) $y = \arcsin \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + 16} + (x - 1) \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 1}$.

4. $y = x^{\sin x^2}$.

5. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$.

6. $y = x^2 - x - 2$; $x_0 = 1$; $y_0 = -2$.

7. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1 + x^2)}{x}$; б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (2x - \pi)^{\cos^2 x}$.

8. $y = x^3 - 3x + 5$.

9. $y = 4x - 2\sin 4x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right]$.

10. $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x - 1}}$.

Варіант 16

1. $y = \sin 4x$.

2. а) $y = 3\arcsin x + 5\operatorname{ctg} x$; б) $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; в) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.

3. а) $y = \ln(\sin x) \cdot e^{\cos^2 x} + 10$; б) $y = (3x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 12x} + (x - 1)^4 \arcsin\dfrac{1}{x - 2}$.

4. $y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}$.

5. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(e^t) \\ y = \sqrt{e^t + 1} \end{cases}$.

6. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$; $x_0 = 3$; $y_0 = 2$.

7. а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 2x + 1}{x^{20} - 4x + 3}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\sin\dfrac{\pi x}{2} \right)^{\frac{2}{1 - x^2}}$.

8. $y = x - \ln(x + 2)$.

9. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$; $[-3; 2]$.

10. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Варіант 17

1. $y = \dfrac{4}{x}$.

2. а) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{x}$; б) $y = (\sqrt{x} + 1)\arcsin x$; в) $y = \dfrac{x\sqrt[3]{x^2}}{(2 - x)^2}$.

3. а) $y = 2 - \operatorname{arctg} e^x \cdot \cos^4 x$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x - 1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 3}$.

4. $y = (\sin 10x)^{5x}$.

5. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$.

6. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$; $x_0 = 0$; $y_0 = 5$.

7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x + 1} - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + 5^{2x})^{\frac{1}{x}}$.

8. $y = 3x^2 - x^3 - 1$.

9. $y = 5 - 4x$; $[-1;1]$.

10. $y = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$.

Варіант 18

1. $y = 3x - 8$.

2. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - \dfrac{\sqrt[4]{x}}{3}$; б) $y = x^3 \log_2 x$; в) $y = \dfrac{3}{3x+5} - \dfrac{2}{x}$.

3. а) $y = 3 + \arccos\sqrt{x} \cdot \mathrm{tg}^3 x$; б) $y = \ln\left(e^{5x} + \sqrt{e^{10x} - 1}\right) + \arcsin(e^{-5x})$.

4. $y = (x^2 + 1)^{\cos^2 x}$.

5. $\begin{cases} x = \mathrm{tg}\, t \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$.

6. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\, x - x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\mathrm{tg}10x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$.

8. $y = xe^{2x}$.

9. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$; $[0;3]$.

10. $y = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 1}$.

Варіант 19

1. $y = \cos 4x$.

2. а) $y = x^5(x^3 - 5)$; б) $y = 3x^2 \sin x$; в) $y = \dfrac{x^5}{x^3 - 5}$.

3. а) $y = 8 + \lg 5x \cdot 5^{\ln^2 x}$; б) $y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln\dfrac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$.

4. $y = x^{3x}$.

5. $\begin{cases} x = \sqrt{t - 1} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t - 1}} \end{cases}$.

6. $y=\dfrac{2}{x}$; $x_0=1$; $y_0=2$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\sin\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{4-x^2}}$.

8. $y=x^2e^{-2x}$.

9. $y=(2+x^2)e^{-x^2}$.

10. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

Варіант 20

1. $y=2x^2$.

2. а) $y=\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{2x^6}{3}+3x-5$; б) $y=2^x\arccos x$; в) $y=\dfrac{x^2+4x+5}{e^x}$.

3. а) $y=\mathrm{tg}^3 x\cdot\sqrt{\sin 2x}+7$; б) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. $y=(x^2+1)^{\sqrt{\cos x}}$.

5. $\begin{cases} x=\ln\dfrac{1-t}{1+t} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$.

6. $y=\dfrac{4}{x}$; $x_0=1$; $y_0=4$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$.

8. $y=x^2-4\ln(1+x)$.

9. $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$; $[-1;2]$.

10. $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

Варіант 21

1. $y=x^2+5x+2$.

2. а) $y=\dfrac{1}{5}\cdot 3^x-\sin x-\cos\dfrac{\pi}{9}$; б) $y=x^2\arccos x$; в) $y=\dfrac{3^x}{x^2+3x+1}$.

3. а) $y = 3 - \operatorname{ctg}\sqrt[3]{x} \cdot 2^{10x^2}$; б) $y = \dfrac{2x-1}{4x^2-4x+3} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{2}}$.

4. $y = (\sin x)^{e^{x^2}}$.

5. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$.

6. $y = \dfrac{4}{x}$; $x_0 = 4$; $y_0 = 1$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(x-2)}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$.

8. $y = x^2 e^x$.

9. $y = x\sqrt{x+3}$; $[-2{,}8;1]$.

10. $y = \dfrac{x^2-2}{x-1}$.

Варіант 22

1. $y = \ln 4x$.

2. а) $y = \sqrt[3]{x^2}(2-x)^2$; б) $y = (x^3-2)\operatorname{tg} x$; в) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\cos x}$.

3. а) $y = \ln 3 + \arcsin\sqrt{x} \cdot e^{\cos x}$; б) $y = \arcsin e^{-4x} + \ln\left(e^{4x} + \sqrt{e^{8x}-1}\right)$.

4. $y = (2x^2-1)^{\operatorname{arctg} x}$.

5. $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

6. $y = \dfrac{4}{x}$; $x_0 = 2$; $y_0 = 2$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_2 x}{2^x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 4x)^{\frac{2}{x^2-1}}$.

8. $y = x^2 e^{-x}$.

9. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$; $[0{,}5;3]$.

10. $y = x - e^{\frac{1}{x-1}}$.

Варіант 23

1. $y = \sin 5x$.

2. а) $y = \frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg} x$; б) $y = (x\sin x + \cos x)\ln x$; в) $y = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2}$.

3. а) $y = 7 - \lg 10x \cdot \sqrt{\cos x}$; б) $y = x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

4. $y = (\sin\sqrt{x})^{e^x}$.

5. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3+1} \\ y = \ln t \end{cases}$.

6. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; $x_0 = 4$; $y_0 = -3$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - x}{5x^3 + x^2 - 7x + 3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

8. $y = \frac{x^2}{x-1}$.

9. $y = xe^{2x-1}$; $[-1;1]$.

10. $y = (x+1)^2 + \frac{2}{x+1}$.

Варіант 24

1. $y = \frac{6}{x}$.

2. а) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 5x^2 + 2$; б) $y = \sqrt[5]{x}\arccos x - x^2 \ln x$; в) $y = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{2}{x}\right)^3}$.

3. а) $y = \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} \cdot 5^{x^2}$; б) $y = \ln\left(e^{3x} + \sqrt{e^{6x} - 1}\right) + \arcsin(e^{-3x})$.

4. $y = (\operatorname{tg} 4x)^{\operatorname{ctg} 4x}$.

5. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1-t^2} \\ y = (\arccos t)^2 \end{cases}$.

6. $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2}$; $x_0=2$; $y_0=\dfrac{5}{3}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

8. $y=\ln x-2\dfrac{x-1}{x+1}$.

9. $y=\operatorname{arctg} x^2$ $[0;1]$.

10. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

Варіант 25

1. $y=7x+5$.

2. а) $y=2e^x+\operatorname{ctg} x-2x+3$; б) $y=\arcsin x\cdot\arccos x$; в) $y=\dfrac{x^3\operatorname{tg} x}{10^x}$.

3. а) $y=5+\cos(\ln x)e^{\lg 10x}$; б) $y=\arcsin\dfrac{1}{2x+3}+2\sqrt{x^2+3x+2}$.

4. $y=(\cos 10x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

5. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$.

6. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$; $x_0=1$; $y_0=1$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

8. $y=x^2\ln x$.

9. $y=\ln(x^2+2x+2)$; $[-2;0]$.

10. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Варіант 26

1. $y=\cos 4x$.

2. а) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$; б) $y=x\ln x+\sin x(1+\cos x)$; в) $y=\dfrac{x^4-x}{3\operatorname{tg} x-1}$.

3. а) $y=4\operatorname{ctg}^2 x\cdot 5^{x^2}$; б) $y=\dfrac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$.

4. $y=(\operatorname{tg}x)^{\ln x}$.

5. $\begin{cases} x=1+\cos^2 t \\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$.

6. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; $x_0=-2$; $y_0=-\dfrac{2}{5}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$.

8. $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

9. $y=\dfrac{x^2}{x^2+4}$; $[-1;3]$.

10. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Варіант 27

1. $y=2x^3$.

2. а) $y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{4}{x^2}$; б) $y=e^x\sin x+x\operatorname{tg}x$; в) $y=\dfrac{-10\operatorname{arctg}x}{7e^x}$.

3. а) $y=12+e^{\sin x}\cdot\operatorname{ctg}4x$; б) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$.

4. $y=(\operatorname{arctg}x)^{\operatorname{arctg}x}$.

5. $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=\operatorname{tg}^2 t \end{cases}$.

6. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; $x_0=1$; $y_0=\dfrac{1}{2}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-125}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2x}{\pi}-\operatorname{ctg}x\right)^{\ln\operatorname{tg}x}$.

8. $y=\ln(x^2+x+1)-\ln\dfrac{3}{4}$.

9. $y=x^3(8-x)$; $[0;7]$.

10. $y=\ln(x^2-4)+\dfrac{1}{x^2-4}$.

Варіант 28

1. $y=2x^3+3$.

2. а) $y=3\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{81}(x^2+18)$; б) $y=3(1-x^2)(1-2x^3)$; в) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{3}}-\dfrac{\ln x}{\arccos x}$.

3. а) $y=5^{\sin x}\cdot\cos 5x$; б) $y=(x^2+4x+5)e^{-2x}+\dfrac{3^{x-1}}{x+1}$.

4. $y=(x+1)^{e^{x^2}}$.

5. $\begin{cases} x=\sqrt{t-3} \\ y=\ln(t-2) \end{cases}$.

6. $y=8x-x^2$; $x_0=0$; $y_0=0$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3^x}{1+3^{x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2}{x^2-1}}$.

8. $y=4+2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

9. $y=\dfrac{3-x^2}{x+3}$; $[-2;1]$.

10. $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$.

Варіант 29

1. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

2. а) $y=3\operatorname{tg}x+x^3\sqrt{x}$; б) $y=5\operatorname{arctg}x\cdot\lg x$; в) $y=\dfrac{3x+2}{\operatorname{tg}x}$.

3. а) $y=9-\operatorname{arctg}5^x\cdot\cos 5x$; б) $y=\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}+\operatorname{tg}\dfrac{3x+2}{6}$.

4. $y=(\cos 2x)^{\ln 2x}$.

5. $\begin{cases} x=\arccos t \\ y=\sqrt{t^2+1} \end{cases}$.

6. $y=8x-x^2$; $x_0=8$; $y_0=0$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$.

8. $y = e^{-x^2}$.

9. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $\left[\dfrac{1}{4}; e^2\right]$.

10. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2}$.

Варіант 30

1. $y = \operatorname{tg} 2x$.

2. а) $y = 3 + 2\ln x + \arcsin x$; б) $y = x^3 \arcsin x + \dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{x}$; в) $y = \dfrac{2x^2}{\ln x} - \dfrac{x+1}{x-1}$.

3. а) $y = \dfrac{1}{2} - \sin 3x \cdot \cos 2x$; б) $y = \dfrac{1}{2}\sin^2\sqrt{x} - \dfrac{2}{5}\sin^5\sqrt{x}$.

4. $y = (\cos x)^{x^2}$.

5. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln(\cos t) \end{cases}$.

6. $y = 4 - x^2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 4$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 1)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

8. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

9. $y = \dfrac{8}{x^4}$; $[1;8]$.

10. $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$.

ПРИКЛАДИ ТЕСТІВ

Теоретичні питання

1. Похідна оберненої функції $y = \arcsin x$ дорівнює …

а) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; в) $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Похідна функції $y = \operatorname{arctg} ax$ дорівнює …

а) $\dfrac{1}{1+x^2}$; б) $\dfrac{a}{1+a^2x^2}$; в) $\dfrac{ax}{1+(ax)^2}$; г) $\dfrac{a}{1-a^2x^2}$.

3. Похідна добутку двох функцій $u=u(x)$ і $v=v(x)$ знаходять як …

а) $u'v-v'u$; б) $\dfrac{u'}{v'}$; в) $u'v+v'u$; г) $u'-v'$.

4. Похідну частки двох функцій $u=u\left(x\right)$ і $v=v\left(x\right)$ знаходять як …

а) $\dfrac{u'v+v'u}{v}$; б) $\dfrac{u'v-v'u}{v}$; в) $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$; г) $u'v-v'u$.

5. Необхідна умова екстремуму функції …

а) $f'\left(x\right)=1$; б) $f'\left(x\right)<0$; в) $f'\left(x\right)=0$; г) $f'\left(x\right)>0$.

6. Достатня умова максимуму функції в точці x_0.

а) $f''\left(x\right)=0$; б) $f''\left(x\right)<0$; в) $f'\left(x\right)=0$; г) $f'\left(x\right)<0$.

7. Умова опуклості графіка функції …

а) $f'\left(x\right)<0$; б) $f''\left(x\right)<0$; в) $f''\left(x\right)=0$; г) $f'\left(x\right)>0$.

Правильні відповіді: 1 – г, 2 – б, 3 – в, 4 – в, 5 – в, 6 – б, 7 – б.

Розв'язування задач

1. Знайти похідну в точці x_0, застосовуючи основні правила диференціювання:

а) $y=10\operatorname{arctg}x$, $x_0=1$. Відповідь: $\dfrac{1}{5}$; 10; 5; 1.

б) $y=x^3+\sin x$, $x_0=0$. Відповідь: $\dfrac{1}{2}$; -1; $\dfrac{\pi}{2}$; 1.

2. Знайти похідну в точці x_0 складеної функції $y=(1+\sin x)^2$, $x_0=0$.

Відповідь: π; 2; 1; $\dfrac{1}{2}$.

3. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y=2x^2$ в точці $x_0=1$.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$; -2; 4; 0.

4. Знайти кутовий коефіцієнт нормалі до кривої $y=2x^2$ в точці $x_0=1$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$; 1; 2; $-\dfrac{1}{4}$.

5. Знайти одну критичну точку I роду для функції $y=x^3-3x+5$.
Відповідь: 2; -1; 0; 1.

6. Знайти критичні точки II роду для функції $y=x^3-12x$.

Відповідь: -1; $\dfrac{1}{12}$; 0; 6.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. –Т. 1.
2. Овчинников П. П. Вища математика / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К.: Техніка, 2000. – Ч. 1.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука. – Т. 1.
4. Смирнов В. М. Курс высшей математики. – М.: Просвещение, 1974. – Т. 1.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980. – Ч. 1.
7. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Клименко Ірина Володимирівна
Кравець Віктор Володимирович
Наріус Надія Григорівна
Русу Сергій Павлович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 4

Редактор *М. О. Долгов*
Компьютерна верстка *Т. В. Шевченко*

Підписано до друку 29.11.2007. Формат 60х84 1/16. Папір для множних апаратів. Ризограф. Ум. друк. арк. 3,0. Обл.-вид. арк. 3,2.
Тираж 300 прим. Зам. № 20. Вид. № 20.

Видавництво Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна
ДК № 1315 від 31.03.2003

Адреса видавництва та ділянки оперативної поліграфії:
49010, Дніпропетровськ, вул. Лазаряна, 2
www.diitrvv.dp.ua; admin@diitrvv.dp.ua