МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Кафедра «Вища математика»

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 3

Частина 2

Укладачі: Т. М. Бусарова
О. В. Звонарьова
Н. В. Міхєєва
В. О. Петренко

Для студентів першого курсу усіх спеціальностей

Дніпропетровськ 2007

УДК 512.8

Укладачі:
Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Н. В. Міхєєва, В. О. Петренко

Рецензенти:
канд. фіз.-мат. наук, доц. *В. Л. Велікін (ДНУ)*
канд. фіз.-мат. наук, доц. *Т. Ф. Михайлова* (ДІІТ)

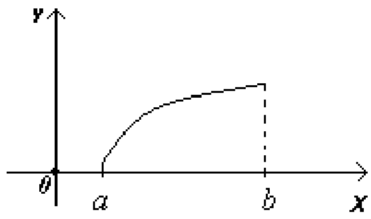
Вступ до математичного аналізу: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 3. Ч. 2 / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна; Уклад.: Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Н. В. Міхєєва, В. О. Петренко. – Д., 2007. – 42 с.

Методичні рекомендації призначаються для студентів першого курсу всіх спеціальностей. Містять основний теоретичний матеріал розділу, велику кількість розв'язаних прикладів, тридцять варіантів індивідуальних домашніх завдань, а також приклади тестових завдань з наведеними відповідями.
Бібліогр.: 5 наймен.

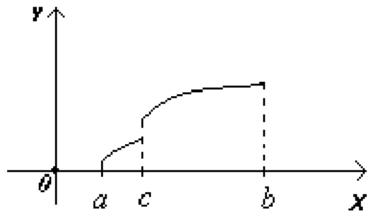
14. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ В ТОЧЦІ

Поняття границі функції зв'язане з іншим важливим поняттям математичного аналізу – неперервністю функції.

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Цей графік можна накреслити одним рухом олівця, без відриву від паперу. Тобто цей графік «інтуїтивно» можна назвати неперервним графіком.



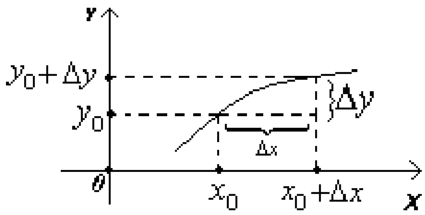
Наведений графік природньо назвати «розривним». Він складається з двох неперервних кусків (у точці C прийдеться відірвати олівець від паперу).



Після передмови перейдемо до строгого означення неперервності.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у точці x_0 і в деякому околі цієї точки і нехай $y_0 = f(x_0)$.

Візьмемо у цьому околі близьку до x_0 іншу точку x і запишемо її у вигляді $x = x_0 + \Delta x$, де Δx – число додатне або від'ємне, яке будемо називати **приростом** незалежної змінної x у точці x_0.



Знайдемо відповідне значення функції: $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$.

Звідси маємо $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - y_0$, або $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Значення Δy будемо називати **приростом** функції $f(x)$ у точці x_0, який відповідає приросту аргументу Δx.

Тепер нехай Δx прямує до нуля. Тоді точка $x_0 + \Delta x$ буде прямувати до точки x_0 і очевидно $\Delta y \to 0$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною** у точці $x = x_0$, якщо вона визначена в цій точці і в деякому її околі і якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{8}$$

тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Рівність (8) можна записати інакше:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0 \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

або

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{9}$$

Остання рівність була одержана на основі того, що $x = x_0 + \Delta x$ і якщо $\Delta x \to 0$ очевидно $x \to x_0$. Таким чином,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0).$$

Тобто для того, щоб знайти границю неперервної функції при $x \to x_0$, достатньо у вираз функції підставити замість аргументу x його значення x_0.

Приклад. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна в довільній точці x_0.

Розв'язання. Дійсно, $y_0 = \sin x_0$. Надамо приріст Δx аргументу x і знайдемо відповідний приріст функції Δy:

$y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x)$; $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - y_0$; $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$.

Перетворимо різницю на добуток:

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Перейдемо до границі, коли $\Delta x \to 0$.

Тоді $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$, а $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x_0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0.$$

Тобто функція $y = \sin x$ за означенням, неперервна у точці x_0.

Однобічна неперервність

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною зліва** у точці x_0, якщо вона визначена в деякому полуінтервалі $(a, x_0]$ і

$$\lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = f(x_0).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною справа** у точці x_0, якщо вона визначена в деякому полуінтервалі $[x_0, b)$ і

$$\lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = f(x_0).$$

На основі вище розглянутих означень можна сформулювати **критерій неперервності** функції $y = f(x)$ у точці:

Функція $y = f(x)$ неперервна у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція визначена у точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існують границі зліва і справа у точці x_0 і виконуються рівності:

$$\lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = f(x_0). \tag{10}$$

Увага!

У рівності (11) останнє значення $f(x_0)$, а не $f(x)$ (як часто пишуть студенти).

15. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, НЕПЕРЕРВНИХ У ТОЧЦІ

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0. Тоді функції $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$ і $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (якщо $\varphi(x_0) \neq 0$) – також неперервні в точці x_0.

Доведемо, наприклад, неперервність суми двох функцій.

Доведення. Оскільки $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, то на основі рівності (9) можна записати:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{і} \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Тепер скористаємося теоремою 3 із п. 10:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + \varphi(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = f(x_0) + \varphi(x_0).$$

Тобто сума $f(x) + \varphi(x)$ є неперервна функція в точці x_0.

Як наслідок відмітимо, що доведення буде вірним і для будь-якої кількості скінченного числа доданків.

В окремому випадку помітимо, що коли функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то функція $C \cdot f(x)$, де C – деяка стала величина, буде теж неперервною в точці x_0.

Теорема 2 (про неперервність складної функції).
Нехай функція $u(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна в точці $u_0 = u(x_0)$. Тоді складна функція $f[u(x)]$ буде неперервною в точці x_0.

Теорема 3 (про неперервність елементарних функцій).
Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

Теорема 3 дуже важлива. Зміст її в тому, що не потрібно перевіряти на неперервність функцію в кожній точці. Достатньо знайти область визначення функції і в **кожній** точці цієї області функція буде неперервною.

Із цих теорем випливає, що функції, які одержані з елементарних за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і операції композиції функцій, будуть теж неперервні в кожній точці своїх областей визначення.

16. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ НА ПРОМІЖКУ

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці інтервалу (a,b), то кажуть, що функція **неперервна на цьому інтервалі**.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною на відрізку** $[a,b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a,b), неперервна справа в точці a і неперервна зліва в точці b.

17. ТОЧКИ РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Для визначення неперервності функції $y = f(x)$ у точці x_0 будемо користуватись критерієм неперервності (10):

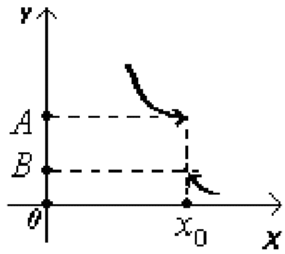
$$\lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = f(x_0).$$

Точка $x = x_0$, в якій хоча б одна з умов критерію не виконується, називається **точкою розриву** функції $f(x)$, а сама функція – **розривною** в точці $x = x_0$.

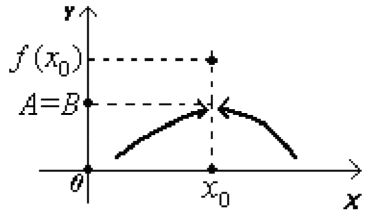
17.1. Розрив І роду

Функція $y = f(x)$ має **розрив І роду** в точці x_0, якщо:

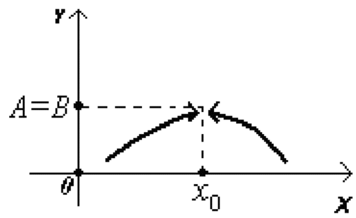
1) існують скінченні однобічні границі $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = B$, але $A \neq B$;



2) однобічні границі скінченні і рівні між собою, але вони не дорівнюють значенню функції в точці x_0;



3) однобічні границі скінченні і рівні між собою $A = B$, але значення функції $f(x)$ в точці x_0 не визначено, тобто $f(x_0)$ – не існує.



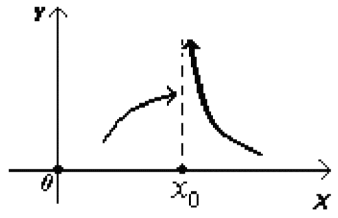
У випадках 2) і 3) точку $x = x_0$ називають точкою **усувного** розриву. Досить довизначити функцію лише в одній точці x_0, поклавши $f(x_0) = A = B$, щоб получити функцію, неперервну в точці x_0.

У першому випадку x_0 - точка неусувного розриву. Величину $|A - B|$ називають **стрибком** функції.

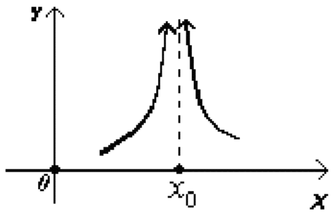
17.2. Розрив ІІ роду

Означення. Точка x_0 називається **точкою розриву ІІ роду**, якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує, або дорівнює нескінченності.

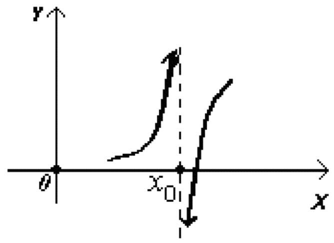
Наприклад,



$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$$



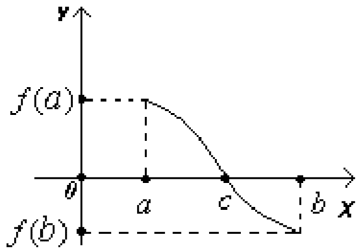
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$$

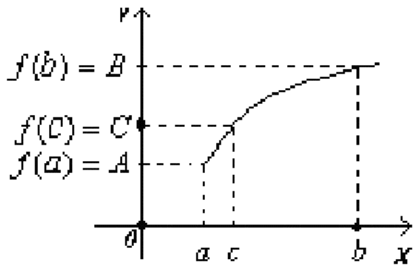
18. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ НЕПЕРЕРВНИХ НА ВІДРІЗКУ

Теорема (про корінь функції). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення, різні за знаком. Тоді між a і b обовязково знайдеться точка c, в якій функція буде дорівнювати нулю: $f(c)=0$, ($a<c<b$).

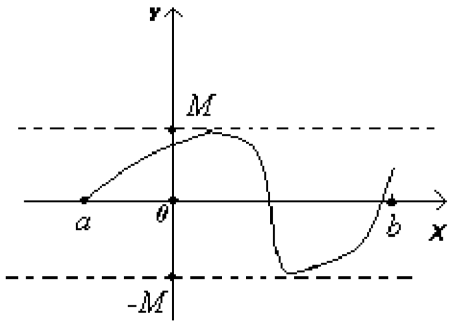


Нехай, наприклад, $f(a)>0$, $f(b)<0$. Із геометричних міркувань очевидно, що графік неперервної функції повинен перетнути вісь Ox хоча б в одній точці $c\in(a,b)$, тобто $f(c)=0$.

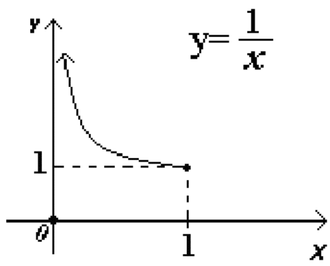
Теорема (про проміжне значення). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$ і на кінцях цього відрізка приймає нерівні значення: $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тоді, яке б не було число *C*, що міститься між *A* і *B*, знайдеться така точка c між a і b, що $f(c)=C$.



Теорема (перша теорема Вейєрштрасса). Нехай функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді ця функція обмежена на цьому відрізку, тобто існує число $M>0$ таке, що для любого $x\in[a,b]$ виконується нерівність: $|f(x)|\le M$.

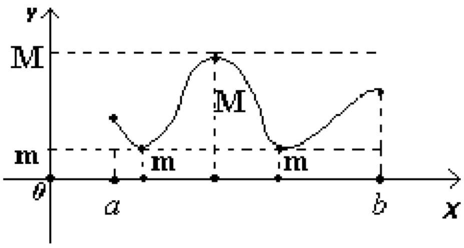


Зауважимо, що коли функція неперервна не на відрізку $[a,b]$, а на інтервалі (a,b) або полуінтервалі $[a,b)$ (або $(a,b]$), то вона може бути і необмеженою. Наприклад, функція $y=\dfrac{1}{x}$ непере-

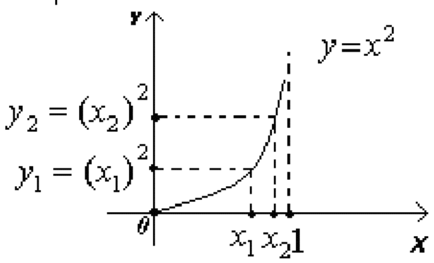


рвна на полуінтервалі $(0,1]$, але не обмежена на ньому, тому що $\lim\limits_{x\to 0^{+0}} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Теорема (друга теорема Вейерштрасса про найбільше і найменше значення). Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка $x = x_1$ така, що значення функції в цій точці буде задовольняти нерівність $f(x_1) \geq f(x)$, де x – будь-яка інша точка відрізка, і знайдеться хоча б одна точка $x = x_2$ така, що $f(x_2) \leq f(x)$.



Значення $f(x_1)$ будемо називати **найбільшим** значенням функції $f(x)$ на $[a,b]$, значення $f(x_2)$ – **найменшим** значенням функції $f(x)$ на $[a,b]$. Позначимо $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$.



Зауважимо, що твердження теореми можуть не виконуватись, якщо розглядати функцію на інтервалі (полуінтервалі), а не на відрізку. Так, наприклад, якщо розглядати функцію $y = x^2$ на полуінтервалі $[0,1)$, то функція не матиме свого найбільшого значення. (Немає крайньої правої точки: яку б ми не взяли точку x_1, близьку до одиниці, обов'язково знайдеться точка x_2, яка ще більше наближена до одиниці, тобто $(x_1)^2 < (x_2)^2$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Наведіть означення неперервності функції $y = f(x)$ в точці x_0.
2. У чому полягає правило граничного переходу для неперервної функції?
3. Що таке однобічна неперервність?
4. Сформулюйте критерій неперервності функції.
5. Сформулюйте теорему про неперервність елементарних функцій.
6. Яка функція називається неперервною на інтервалі?
7. Що таке неусувний розрив? Що таке стрибок функції?
8. Сформулюйте означення розриву II роду.
9. Сформулюйте властивості функцій, неперервних на відрізку. Наведіть геометричні ілюстрації цих властивостей.
10. Що таке найбільше і найменше значення функції на відрізку?

Приклад 1. За допомогою означення неперервності функції в точці довести, що функція $y = 4x^3$ неперервна в точці x_0.

Розв'язання. Нехай Δx приріст аргументу x.

Знайдемо відповідний приріст функції:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 4(x_0 + \Delta x)^3 - 4x_0^3 =$$
$$= 4\left[x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3\right] = 4\Delta x\left(3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2\right).$$

Скористуємося означенням неперервності функції в точці: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[4\Delta x\left(3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2\right)\right] = 0,$ тобто функція $y = 4x^3$ неперервна в точці x_0.

Приклад 2. Довести, що функція $y = x^2 - 3x + 5$ неперервна на $(-\infty, \infty)$.

Розв'язання. Скористуємося теоремами 1 і 3, п. 15.

Функції $y_1 = x^2,\ y_2 = 3x,\ y_3 = 5$ елементарні.

Область визначення цих функцій – уся числова вісь, тобто $(-\infty, \infty)$. Тому за теоремою 3 ці функції неперервні на інтервалі $(-\infty, \infty)$. Функція $y = x^2 - 3x + 5$ як сума неперервних функцій (теорема 1) буде теж неперервною на $(-\infty, \infty)$.

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{1}{x-3}$ на інтервалі (a, b), якщо:

1) $(a, b) = (-5, 2)$;

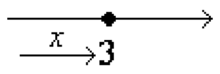
2) $(a, b) = (1, 4)$.

Розв'язання.

1. За означенням функція $f(x)$ називається неперервною на інтервалі, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу. Задана функція елементарна. Область її визначення $(-\infty, 3) \bigcup (3, +\infty)$. Тому функція буде неперервною в кожній точці числової осі за виключенням точки $x = 3$ (теорема 3, п. 15). Тому на інтервалі $(-5, 2)$ функція $y = \dfrac{1}{x-3}$ буде неперервною (точка $x = 3$ не належить цьому інтервалу).

2. У цьому випадку точка $x = 3$ належить інтервалу $(1, 4)$, тому в цій точці функція має розрив. За допомогою критерію неперервності (10) визначимо, якого виду розрив має функція $y = \dfrac{1}{x-3}$ в точці $x_0 = 3$.

Знайдемо границю зліва:

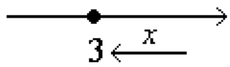
$$\lim_{x \to 3^{-0}} \frac{1}{x-3} = \Big\{$$


$$\Big\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Різниця } x-3 \to 0 \ \text{ і за знаком вона буде від'ємною.} \\ \text{Тобто знаменник за знаком від'ємний і прямує} \\ \text{ до нуля, а увесь дріб буде прямувати до } -\infty. \end{array} \right\} = -\infty.$$

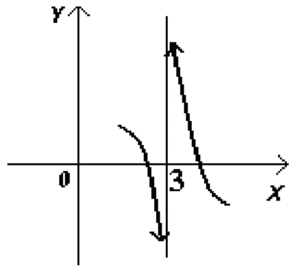
Знайдемо границю справа:

$$\lim_{x \to 3^{+0}} \frac{1}{x-3} = \Bigg\{$$



$$\Bigg\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Різниця } x-3 \to 0 \\ \text{за знаком додатна.} \end{array} \right\} = \infty.$$

За означенням у точці $x_0 = 3$ функція має розрив другого роду. Зробимо схематичний рисунок поведінки функції в околі точки $x_0 = 3$.



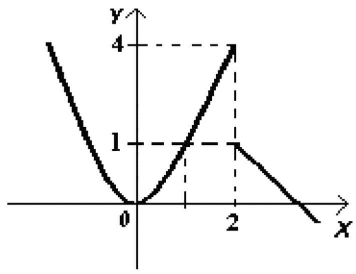
Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію. Побудувати графік.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ 3 - x, & x \geq 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція $f(x)$ на проміжку $(-\infty, 2)$ задана виразом $y_1 = x^2$, а на проміжку $[2, +\infty)$ задана виразом $y_2 = 3 - x$. Функції y_1 і y_2 неперервні на усій числовій осі, а тому і на відповідних проміжках. Задана функція може мати розрив тільки в точці, де змінюється її аналітичний вираз, тобто в точці $x_0 = 2$. Дослідимо функцію в цій точці (за допомогою критерію (10)).

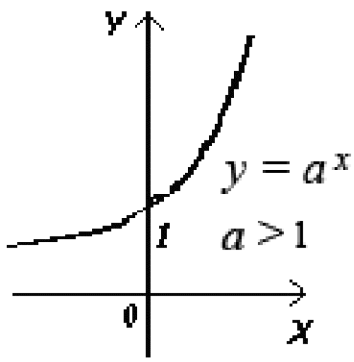
$$\lim_{x \to 2^{-0}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-0}} x^2 = 4, \qquad \lim_{x \to 2^{+0}} f(x) = \lim_{x \to 2^{+0}} (3 - x) = 1.$$

Таким чином, в точці $x_0 = 2$ функція має розрив I роду. Границя зліва не дорівнює границі справа. Розрив неусувний, стрибок функції $|A - B| = 3$. Побудуємо графік функції.



Приклад 5. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Область визначення цієї функції – уся дійсна вісь, за виключенням точки $x = 0$. Тому функція $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$ буде неперервною всюди за виключенням точки $x_0 = 0$. Визначимо, якого роду розрив має функція у цій точці. Спочатку нагадаємо графік показникової функції $y = a^x, a > 1$.

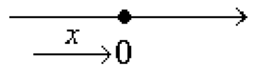


Коли аргумент $x \to +\infty$, то функція $a^x \to +\infty$.

Коли аргумент $x \to -\infty$, то функція $a^x \to 0$.

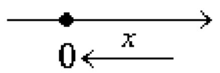
А тепер дослідимо на неперервність функцію $f(x)=5^{\frac{1}{x}}$ за допомогою критерія (10):

$$\lim_{x\to 0^{-0}} 5^{\frac{1}{x}} = \Bigg\{$$



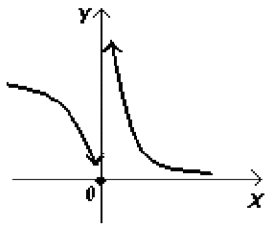
$$\Bigg\} = \left\{ \frac{1}{x} \to -\infty, \text{ а } 5^{\frac{1}{x}} \to 0 \right\} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0^{+0}} 5^{\frac{1}{x}} = \Bigg\{$$



$$\Bigg\} = \left\{ \frac{1}{x} \to +\infty, \text{ а } 5^{\frac{1}{x}} \to \infty \right\} = \infty.$$

Помітимо, що значення функції в точці $x_0=0$ не існує. Маємо розрив другого роду в цій точці. Побудуємо схематичний графік поведінки функції в околі точки $x_0=0$.



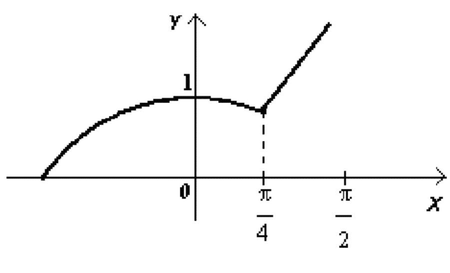
Приклад. За якого значення A функція $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le \dfrac{\pi}{4}\\ A\cdot x, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$ буде неперервна? Побудувати її графік.

Розв'язання. Функції $y_1=\cos x$ і $y_2=Ax$ неперервні на $(-\infty,\infty)$. Єдина точка, в якій може не виконуватись критерій неперервності, це точка $x_0=\dfrac{\pi}{4}$. Знайдемо однобічні границі і значення функції в точці $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{-0}} \cos x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{-0}} A\cdot x = A\cdot\frac{\pi}{4}; \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Для того, щоб функція була неперервною в точці $x_0=\dfrac{\pi}{4}$, необхідно, щоб виконувались рівності: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=A\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Звідси $A=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Тільки за такого значення A функція буде неперервною. Побудуємо її графік.



ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Приклад 1. В яких точках функції $f(x)=\dfrac{1}{4+5x}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-7x}$ будуть розривними?

Приклад 2. Дослідити на неперервність функції. Побудувати графіки функцій:

1) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{5}{2}x, & x<-2,\\ 9-x^2, & x\geq -2.\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leq 0,\\ 2, & 0<x\leq 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$

Приклад 3. За якого значення A функція $f(x)=\begin{cases}2x+A, & x<\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x, & x\geq\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ буде неперервною? Побудувати графік функції.

Приклад 4. Дослідити на неперервність функції. Побудувати схематичні графіки поведінки функцій в околі точок розриву:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x-15}$; 2) $f(x)=e^{\frac{3}{7-x}}$; 3) $f(x)=\dfrac{|3x-1|}{3x-1}$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Приклад 1. В яких точках функції $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$, $f(x)=\dfrac{x+7}{x^2+6x}$ будуть розривними?

Відповіді: $x=2$; $x=0$; $x=-6$.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функції. Побудувати графіки функцій:

1) $f(x)=\begin{cases}-3x, & x\leq 0\\ x^2+2, & 0<x\leq 1\\ 3, & x>1.\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2, & x<-3\\ e^x, & x\geq -3.\end{cases}$

Приклад 3. За якого значення a функція $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq -1,\\ x+a, & x>-1.\end{cases}$ буде неперервною? Побудувати графік функції.

Відповідь: $a=1$.

Приклад 4. Дослідити на неперервність функції. Побудувати схематичні графіки поведінки функцій в околі точок розриву:

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-25}$; 2) $f(x)=2^{\frac{1}{7x-5}}$; 3) $f(x)=\dfrac{|5-x|}{5-x}$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1

1 *a*, *b*, *c*, *d*, *e* – визначити значення функцій в точках і побудувати ці точки в декартовій системі координат;

1 *f* – знайти значення функції;

2 – знайти область визначення функцій;

3 – побудувати графіки функцій (використовуючи графіки елементарних функцій);

4 – складну функцію зобразити за допомогою ланцюжка, складеного із основних елементарних функцій і, навпаки, з елементарних функцій скласти складну функцію.

Варіант 1

1. *a*) $f(x)=2-3x-2x^2$ $\quad x=-2;0;0,5;1$;

b) $f(x)=x\sin 2x$; $\quad x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

c) $x+5y-2=0$; $\quad x=-5;-2;0;1;3$;

d) $\begin{cases} x=2-t^2, \\ y=t-1 \end{cases}$ $\quad t=0;1;1,5;3;5$; $\quad$ e) $y=\begin{cases} 8x-1, & -\infty<x\le 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ x^3+1, & 2\le x<\infty \end{cases}$ $\quad x=-1;0;1;2;3$;

f) $f(x)=1-x^2-x^3$ $\quad f(0)=?$ $f(-3)=?$ $f\left(\frac{2}{3}\right)=?$ $f(2x)=?$ $f\left(\frac{1}{x}\right)=?$

2. *a*) $y=\arccos(3x-1)$; $\quad$ *b*) $y=\frac{x+1}{x^2-1}$; $\quad$ *c*) $y=\sqrt{3-x}$.

3. *a*) $y=\mathrm{ctg}(x+1)$; $\quad$ *b*) $y=\sqrt{2x-5}$.

4. *a*) $y=\arcsin^2(\cos x)$; $\quad$ *b*) $y=\sqrt{u}$, $u=\mathrm{tg}\,v$, $v=\frac{x+1}{x}$.

Варіант 2

1. *a*) $f(x)=2+3x+x^2$; $\quad x=-2;0;0,5;1$;

b) $f(x)=x\cos x$; $\quad x=0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$;

c) $x^2-y+2=0$; $\quad x=-5;-2;0;1;3$;

d) $\begin{cases} x=t+2, \\ y=t^2+1 \end{cases}$ $\quad t=-1;0;2;5;6$; $\quad$ e) $y=\begin{cases} x+2, & -\infty<x\le -1, \\ \sqrt{x}, & -1<x<2, \\ x-1, & 2\le x<\infty \end{cases}$ $\quad x=-2;-1;0;2;3$;

f) $f(x)=x^2+x+\frac{1}{x}$ $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=?$ $f(-3)=?$ $f(-7x+8)=?$ $f(-x)=?$ $f\left(\frac{1}{x}\right)=?$

2. *a*) $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$;   *b*) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{8-x}}$;   *c*) $y=\ln(5-x^2)$.

3. *a*) $y=5\sin(x-1)$;   *b*) $y=x^2+2x-3$.

4. *a*) $y=\operatorname{arctg}^2(\ln x)$;   *b*) $y=\ln u$, $u=\sin 2v$, $v=x-1$.

Варіант 3

1. *a*) $f(x)=|3x+2|$ $x=-2;-1;0;1;3$;

   b) $f(x)=\sin^2 2x$ $x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}$;

   c) $\ln x+5y-2=0$ $x=\dfrac{1}{e};e^7;\dfrac{1}{2};1;3e$;

   d) $\begin{cases} x=t^2+t, \\ y=t-1 \end{cases}$ $t=-1;0;2;3;5$;

   e) $y=\begin{cases} 3, & -\infty<x<-1, \\ x+1, & -1\le x<0, \\ x^3-1, & 0\le x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;-0,5;0;1$;

   f) $f(x)=x^3+x^2-x+1$ $f(0)=?$ $f(-1)=?$ $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=?$ $f(2x)=?$ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=?$

2. *a*) $y=e^{1-x}$;   *b*) $y=\dfrac{x+1}{3x^2+x}$;   *c*) $y=\arccos x$.

3. *a*) $y=e^{1-x}$;   *b*) $y=\ln(x+2)-1$.

4. *a*) $y=\sin(2\ln x)$;   *b*) $y=\sqrt[3]{u}$, $u=\operatorname{ctg} v$, $v=\dfrac{x+1}{x}$.

Варіант 4

1. *a*) $f(x)=2+3x+2x^2$ $x=-2;0;0,5;1$;

   b) $f(x)=x+\sin 2x$ $x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}$;

   c) $e^x+y-1=0$ $x=-2;-1;0;1;\ln 3$;

   d) $\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=t+2 \end{cases}$ $t=-1;-0,5;0;2;3$

   e) $y=\begin{cases} -x+2, & -\infty<x\le-1, \\ 1, & -1<x<2, \\ 2x+1, & 2\le x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;0,5;2$;

   f) $f(x)=\ln(x+1)$ $f(0)=?$ $f(-1)=?$ $f(e^2+2e)=?$ $f(x-1)=?$ $f(e^x-1)=?$

2. *a*) $y = x^4 + x^2 + \sqrt{x}$; *b*) $y = \dfrac{x+1}{7x+2}$; *c*) $y = \ln(1 - x^2)$.

3. *a*) $y = \sin 2x + 1$; *b*) $y = 2^{x-3}$.

4. *a*) $y = \ln^2(\sin x)$; *b*) $y = \sqrt{u}$, $u = \arccos v$, $v = 5x$.

Варіант 5

1. *a*) $f(x) = 3x - |2 - 2x^2|$; $x = -2; 0; 0,5; 1$;

   b) $f(x) = \operatorname{tg} 2x + 1$; $x = 0; \dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}$;

   c) $x^2 + 5y^2 - 1 = 0$ $x = -5; -2; 0; 1; 3$;

   d) $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = -t \end{cases}$ $t = -1; 0; 2; 4; 5$; *e*) $y = \begin{cases} x + 1, & -\infty < x < -10, \\ x^2, & -10 \le x \le -5, \\ -x, & -5 < x < \infty \end{cases}$ $x = -11; -10; -5; 0; 1$;

   f) $f(x) = e^x$ $f(0) = ?$ $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = ?$ $f(3) = ?$ $f(\ln x) = ?$ $f(-x) = ?$

2. *a*) $y = \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{4 - x^2}\right)$; *b*) $y = \dfrac{x+1}{3x-2}$; *c*) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$.

3. *a*) $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; *b*) $y = x^2 + 4x + 5$.

4. *a*) $y = e^{\operatorname{arctg}(2x)}$; *b*) $y = u^{-1}$, $u = \sin v$, $v = (x+2)^2$.

Варіант 6

1. *a*) $f(x) = |-x|$ $x = -2; -1; 0; 3; 5$;

   b) $f(x) = x\cos^2 2x$ $x = 0; \dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}$;

   c) $x + 5\ln y - 2 = 0$ $x = -3; -1; 5\ln 4 + 2; 2; 7$.

   d) $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t^2 + t \end{cases}$ $t = -1; 0; 2; 3; 5$

   e) $y = \begin{cases} 2 - 3x, & -\infty < x < 0, \\ 3, & 0 \le x \le 2, \\ x - 5, & 2 < x < \infty \end{cases}$ $x = -1; 0; 0,5; 2; 3$.

   f) $f(x) = \sin x + 2x$ $f(0) = ?$ $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = ?$ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = ?$ $f(\arcsin x) = ?$ $f(-x) = ?$

2. *a*) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$; *b*) $y = \dfrac{1}{\ln(x-2)}$; *c*) $y = e^{\frac{1}{x^2+3x}}$.

3. *a*) $y = |\sin x|$; *b*) $y = \dfrac{1}{1-x} + 1$.

4. *a*) $y = \dfrac{1}{\sin(x - x^2)}$; *b*) $y = u^3$, $u = \ln v$, $v = 5^{x-1}$.

Варіант 7

1. *a*) $f(x) = 2 - 3x - 2x^2$ $x = -2; 0; 0,5; 1$;

   b) $f(x) = x + \operatorname{tg} 2x$ $x = 0; \dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}$;

   c) $4^x - y - 2 = 0$ $x = -1; -0,5; 0; 1; 3$;

   d) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = |t+1| \end{cases}$ $t = -2; -1; 0; 3; 5$; *e*) $y = \begin{cases} 3x, & -\infty < x \le -3, \\ x^2, & -3 < x < -1, \\ -2x, & -1 \le x < \infty \end{cases}$ $x = -4; -3; -2; 0; 1$.

   f) $f(x) = \arcsin x$ $f(0) = ?$ $f(-1) = ?$ $f(1) = ?$ $f(\sin x) = ?$ $f(\cos x) = ?$

2. *a*) $y = \sqrt{9x^2 - 1}$; *b*) $y = \dfrac{x+1}{x}$; *c*) $y = \operatorname{arctg}(x+2)$.

3. *a*) $y = 2(x-1)^2 + 1$; *b*) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. *a*) $y = \ln^2(e^{-x})$; *b*) $y = u - 2u^2$, $u = \dfrac{1}{v}$, $v = 2^x$.

Варіант 8

1. *a*) $f(x) = 1 + 3x - 2x^2$ $x = -2; 0; 0,5; 1$;

   b) $f(x) = x \ln 2|x|$ $x = -1; \dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{e}{2}; -\dfrac{e^2}{8}$;

   c) $x + 2\sin y + 2 = 0$ $x = -3; -2; 0; -\dfrac{3}{2}$;

   d) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = t - 1 \end{cases}$ $t = 0; 2; 4; 8; 16$; *e*) $y = \begin{cases} 3x - 2, & -\infty < x < -1, \\ 2 - x, & -1 \le x < 2, \\ x^2, & 2 \le x < \infty \end{cases}$ $x = -2; -1; 0; 2; 3$.

   f) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ $f(0) = ?$ $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = ?$ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = ?$ $f(\operatorname{arctg} x) = ?$ $f\left(-\dfrac{x}{2}\right) = ?$ $f\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = ?$

2. *a*) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; *b*) $y = \dfrac{2-x}{7x+2}$; *c*) $y = \arcsin 2x$.

3. *a*) $y = \operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}$;   *b*) $y = \sqrt{x-3} + 1$.

4. *a*) $y = \left(\sin(\cos x)\right)^{-1}$;   *b*) $y = u^3$, $u = 1 - v^2$, $v = \sin x$.

Варіант 9

1. *a*) $f(x) = -2x^2 + 2 - 7x$ $x = -2; 0; 0,5; 1$;

b) $f(x) = x - \sin 2x$ $x = 0; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}$;

c) $\sin x + y - 1 = 0$ $x = -\dfrac{3\pi}{2}; -\pi; 0; \dfrac{\pi}{3}; 3\pi$;

d) $\begin{cases} x = t^2 - t + 1, \\ y = 2t \end{cases}$ $t = -1; 0; 1; 2,5; 4$;

e) $y = \begin{cases} 3 - x, & -\infty < x \le -2, \\ 5, & -2 < x \le 0, \\ x^2, & 0 < x < \infty \end{cases}$ $x = -2; -1; 0; 1; 2$.

f) $f(x) = x^2 + 3x$ $f(-1) = ?$ $f(1) = ?$ $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = ?$ $f(4x) = ?$ $f(x-2) = ?$

2. *a*) $y = \sqrt{\sin x}$;   *b*) $y = \dfrac{2}{3 + x^2}$;   *c*) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{5}$.

3. *a*) $y = \cos(x+1) - 1$;   *b*) $y = \sqrt[3]{x+4}$.

4. *a*) $y = 2^{\operatorname{tg}^2 x}$;   *b*) $y = \dfrac{3}{1+u}$, $u = \operatorname{arctg} v$, $v = \dfrac{x^2}{2}$.

Варіант 10

1. *a*) $f(x) = -3x + 2x^2 - 4$ $x = -1; 0; 0,5; \dfrac{2}{5}$;

b) $f(x) = \arcsin 2x$ $x = -\dfrac{1}{4}; 0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{4}; \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

c) $|x| - 3y - 1 = 0$ $x = -5; -2; 0; 1; 10$;

d) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t \end{cases}$ $t = 0; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}$; *e*) $y = \begin{cases} 2, & -\infty < x \le -2, \\ x^2 + 1, & -2 < x \le 1, \\ x, & 1 < x < \infty \end{cases}$ $x = -3; -2; 0; 1; 2$;

f) $f(x) = e^x$ $f(0) = ?$ $f(-3) = ?$ $f\left(\dfrac{2}{5}\right) = ?$ $f(x) \cdot f(-x) = ?$ $f(x+1) = ?$

2. *a*) $y = \arcsin x$;   *b*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;   *c*) $y = \ln(4 - 3x)$.

3. *a*) $y=\operatorname{arctg}(x-1)$; *b*) $y=(x+4)^2-2$.

4. *a*) $y=\sin^2(e^x)$; *b*) $y=\dfrac{1}{u}$, $u=\arccos v$, $v=2^{x+1}$.

Варіант 11

1. *a*) $f(x)=2+3x+4x^2$ $x=-2;0;0,5;\dfrac{3}{5}$;

b) $f(x)=x+\arcsin x$ $x=-\dfrac{1}{2};0;1;\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $xy=e^x$ $x=-5;-2;0;1;\ln 3$;

d) $\begin{cases} x=t+t^2, \\ y=-t \end{cases}$ $t=-2;0;1;3;5$; *e*) $y=\begin{cases} 3x, & -\infty<x\le 1, \\ 1-x^2, & 1<x<3, \\ -x, & 3\le x<\infty \end{cases}$ $x=-1;0;1;2;3$.

f) $f(x)=\sin 2x$ $f(0)=?$ $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=?$ $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=?$ $f(\arcsin x)=?$ $f\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=?$

2. *a*) $y=\sin\dfrac{1}{x}$; *b*) $y=x+\sqrt{-x}$; *c*) $y=\operatorname{tg}x$.

3. *a*) $y=e^{x+1}+1$; *b*) $y=2\cos 2x$.

4. *a*) $y=\operatorname{tg}\ln(\sin x)$; *b*) $y=2^u$, $u=\dfrac{1}{v^2}$, $v=\cos(x-1)$.

Варіант 12

1. *a*) $f(x)=2^{-x}$ $x=-2;0;0,5;1$;

b) $f(x)=\cos 2x\cdot\sin 2x$ $x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}$;

c) $3x^2+5y^2=15$ $x=-\dfrac{3}{2};-2;0;1;\dfrac{2}{3}$.

d) $\begin{cases} x=3-t, \\ y=t^2 \end{cases}$ $t=0;1;1,5;3;5$; *e*) $y=\begin{cases} 1-x, & -\infty<x\le -2, \\ x^2, & -2<x<0, \\ x, & 0\le x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;2;3$.

f) $f(x)=2x+\sqrt{x}$ $f(0)=?$ $f(-4)=?$ $f(16)=?$ $f(x+3)=?$ $f\left(\dfrac{4}{x^2}\right)=?$

2. *a*) $y=\lg(x^2+1)$; *b*) $y=\dfrac{x}{4x^2-5}$; *c*) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

3. *a*) $y=(x-2)^2$; *b*) $y=\sin 2x+1$.

4. *a*) $y=\sin^2(\operatorname{tg} x)$; *b*) $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$, $v=x^3$.

Варіант 13

1. *a*) $f(x)=|2x+3|$ $x=-2;-1;0;3;5$;

   b) $f(x)=\sin 3x$ $x=0;\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{9};\frac{\pi}{6}$;

   c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ $x=-2;-1;0;1;2$;

   d) $\begin{cases} x=t+2, \\ y=2-t \end{cases}$ $t=-1;0;1;2;3$; *e*) $y=\begin{cases} -5+x, & -\infty<x<-1, \\ x^3, & -1\le x<1, \\ 3-x, & 1\le x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;1;2$;

   f) $f(x)=\sin 2x+x$ $f(0)=?$ $f\left(-\frac{10}{4}\pi\right)=?$ $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=?$ $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=?$ $f\left(\frac{1}{x}\right)=?$

2. *a*) $y=3x^3+x$; *b*) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+8}}$; *c*) $y=\ln(1-x)$.

3. *a*) $y=x^3+2$; *b*) $y=3^{x-2}$.

4. *a*) $y=e^{\operatorname{tg} 2x}$; *b*) $y=\operatorname{tg} u$, $u=2^v$, $v=x-1$.

Варіант 14

1. *a*) $f(x)=\sqrt{x+x^2}$ $x=0;1;\frac{3}{4};5$;

   b) $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ $x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{9};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

   c) $x^2+y^2=16$ $x=-4;-2;0;1;3$;

   d) $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=t^2+2 \end{cases}$ $t=1;2;0;3;5$; *e*) $y=\begin{cases} 1-x, & -\infty<x\le -2, \\ x^2, & -2<x\le 3, \\ -5, & 3<x<\infty \end{cases}$ $x=-3;-2;0;3;5$;

   f) $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$ $f(0)=?$ $f\left(-\frac{1}{2}\right)=?$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=?$ $f(2a+b)=?$ $f\left(\frac{1}{x}\right)=?$

2. *a*) $y=2x+\sqrt{x^2+1}$; *b*) $y=\ln(x+2)$; *c*) $y=\frac{1}{\sin x}$.

3. *a*) $y=x^2+4x+2$; *b*) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

4. *a*) $y=\sin^2 x^3$; *b*) $y=\sqrt{u}$, $u=\ln v$, $v=x^2$.

Варіант 15

1. $a)$ $f(x)=|3-2x|$ $\qquad x=-2;-1;2;\dfrac{4}{7};$

$b)$ $f(x)=\cos 2x-\sin 2x$ $\qquad x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4};$

$c)$ $6x+y^2-1=0$ $\qquad x=-\dfrac{1}{6};-1;0;-2;3;$

$d)$ $\begin{cases} x=t+e, \\ y=t^2-1 \end{cases}$ $t=-1;0;2;4;5;$ $\quad e)$ $y=\begin{cases} 2x, & -\infty<x\le -1, \\ 1-x, & -1<x\le 2, \\ x^2, & 2<x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;2;3;$

$f)$ $f(x)=\cos 2x$ $\quad f(0)=?\quad f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=?\quad f\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=?\quad f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=?\quad f\left(-\dfrac{x}{2}\right)=?$

2. $a)$ $y=2x^2+x+\sqrt{x};$ $\qquad b)$ $y=\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x-1};$ $\qquad c)$ $y=\dfrac{1}{\ln(x^2-3)}.$

3. $a)$ $y=\sin 2x;$ $\qquad b)$ $y=(x+1)^2-4.$

4. $a)$ $y=\mathrm{tg}^2(x^2+1);$ $\qquad b)$ $y=\sin u,\ u=2v,\ v=x-1.$

Варіант 16

1. $a)$ $f(x)=x^3-x$ $\qquad x=-2;-1;0;1;$

$b)$ $f(x)=\sin(\pi-3x)$ $\qquad x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{9};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4};$

$c)$ $3x^2+3y^2=12$ $\qquad x=-1;0;\dfrac{1}{2};1,5;2.$

$d)$ $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=t+1 \end{cases}$ $t=-1;0;2;4;5;$ $\quad e)$ $y=\begin{cases} 2-x, & -\infty<x\le -1, \\ x+5, & -1<x\le 2, \\ x, & 2<x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;2;3;$

$f)$ $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2x}$ $\quad f(1)=?\quad f\left(\dfrac{9}{8}\right)=?\quad f(3a-2)=?\quad f\left(\dfrac{x}{2}\right)=?\quad f(x+1)=?$

2. $a)$ $y=\dfrac{2x+3}{(2x-1)^2};$ $\qquad b)$ $y=2^{\frac{1}{x}};$ $\qquad c)$ $y=\sqrt[3]{x+7}.$

3. $a)$ $y=(x+3)^2;$ $\qquad b)$ $y=e^x-1.$

4. $a)$ $y=2\cos e^{x^2};$ $\qquad b)$ $y=u^3,\ u=\sin v,\ v=2x.$

Варіант 17

1. $a)$ $f(x)=|2-x|$ $\qquad x=-1;0;2;3;$

b) $f(x)=\operatorname{tg} x^2$ $\quad x=0;\sqrt{\frac{\pi}{6}};\sqrt{\frac{\pi}{4}};\sqrt{\frac{\pi}{3}};\sqrt{\frac{\pi}{2}}$;

c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ $\quad x=0;-1;-2;1;2$.

d) $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=1-t^2 \end{cases}$ $t=-2;0;1;3;4$; *e*) $y=\begin{cases} 1-x, & -\infty<x\le 3, \\ x^2+1, & 3<x<4, \\ 3, & 4\le x<\infty \end{cases}$ $x=0;3;3,5;4;5$;

f) $f(x)=\frac{x}{x+1}+x$ $f(0)=?$ $f\left(-\frac{1}{3}\right)=?$ $f(4)=?$ $f(x+10)=?$ $f\left(\frac{7}{x}\right)=?$

2\. *a*) $y=\sin\sqrt{x}$; *b*) $y=\frac{x-1}{9+x^2}$; *c*) $y=\ln(x-x^2)$.

3\. *a*) $y=\operatorname{ctg} x-\frac{\pi}{2}$; *b*) $y=(x-1)^3$.

4\. *a*) $y=x^{\sin x^2}$; *b*) $y=\sqrt[3]{u}$, $u=\operatorname{arctg}\frac{1}{v}$, $v=x^2$.

Варіант 18

1\. *a*) $f(x)=3^{x-1}$ $\quad x=-\frac{1}{2};0;1;2$;

b) $f(x)=\operatorname{ctg} 2x$ $\quad x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

c) $x^2+y^2=1$ $\quad x=-1;-\sqrt{0,36};-0,8;0;\sqrt{\frac{3}{4}}$;

d) $\begin{cases} x=t-3, \\ y=-t^2 \end{cases}$ $t=-3;-1;0;2;4$; *e*) $y=\begin{cases} -3, & -\infty<x<-1, \\ x+5, & -1\le x<1, \\ x^2, & 1\le x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;1;2$;

f) $f(x)=x-\cos x$ $f(0)=?$ $f\left(-\frac{9\pi}{4}\right)=?$ $f\left(\frac{8\pi}{3}\right)=?$ $f(-2x)=?$ $f\left(\frac{\pi}{2}+b\right)=?$

2\. *a*) $y=5^{-\sqrt{x}}$; *b*) $y=\frac{x}{2x^2+x}$; *c*) $y=\ln(1+x^2)$.

3\. *a*) $y=x^2-3x+1$; *b*) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

4\. *a*) $y=\sin\operatorname{tg} x^2$; *b*) $y=3u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\ln x$.

Варіант 19

1\. *a*) $f(x)=|x-1|$ $\quad x=-3;-1;0;1$;

$b)\ f(x)=\sqrt{1+\sin^2 2x}$ $\qquad x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};$

$c)\ x^2-y^2-4=0$ $\qquad x=2;3;-3;\sqrt{20};-\sqrt{13};$

$d)\ \begin{cases}x=3t+3,\\ y=-t\end{cases}$ $\qquad t=-1;0;0,5;2;4;$

$e)\ y=\begin{cases}-x, & -\infty<x<-3,\\ x^2, & -3\le x\le 2,\\ 3+x, & 2<x<\infty\end{cases}$ $\qquad x=-4;-3;2;3;10;$

$f)\ f(x)=x+\sqrt{x+1}$ $\quad f(0)=?$ $\quad f\left(-\frac{1}{4}\right)=?$ $\quad f(8)=?$ $\quad f(a+2b)=?$ $\quad f(3x)=?$

2. $a)\ y=\ln(1-x^2);$ $\qquad b)\ y=\frac{x}{(5-3x)^2};$ $\qquad c)\ y=\sqrt{9+x^2}.$

3. $a)\ y=\ln(x+2);$ $\qquad b)\ y=\sin x+1.$

4. $a)\ y=\sqrt{\sin\ln x};$ $\qquad b)\ y=e^u,\ u=v^2,\ v=\mathrm{tg}\,x.$

Варіант 20

1. $a)\ f(x)=1+4x-\frac{1}{2}x^2$ $\qquad x=-2;0;0,5;\frac{1}{3};$

$b)\ f(x)=\cos^2 2x$ $\qquad x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};$

$c)\ x+y^2-1=0$ $\qquad x=-24;-15;-8;-3;0;$

$d)\ \begin{cases}x=(t+3)^2,\\ y=t-1\end{cases}$ $\qquad t=-3;0;1;2;5;$

$e)\ y=\begin{cases}x, & -\infty<x\le -1,\\ 2x-1, & -1<x\le 1,\\ 1-x^2, & 1<x<\infty\end{cases}$ $\qquad x=-2;-1;0;1;3;$

$f)\ f(x)=\cos 2x$ $\quad f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=?$ $\quad f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=?$ $\quad f(x-4)=?$ $\quad f(2x)=?$ $\quad f\left(\frac{\pi}{x}\right)=?$

2. $a)\ y=\frac{1}{10x-3};$ $\qquad b)\ y=\sqrt{2-x^2};$ $\qquad c)\ y=e^{\sqrt{3+x}}.$

3. $a)\ y=(2x)^3+1;$ $\qquad b)\ y=\cos\frac{x}{2}.$

4. $a)\ y=\sin e^{\mathrm{tg}\,x};$ $\qquad b)\ y=u^2,\ u=\ln v,\ v=\arccos x.$

Варіант 21

1. $a)\ f(x)=|x|$ $\qquad x=-3;-1;0;5;$

b) $f(x)=\sin^2 x$ $\qquad x=0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$;

c) $3x^2+2y^2=6$ $\qquad x=-1;-0,5;0;0,5;1$;

d) $\begin{cases} x=2t^2+t-1, \\ y=2-t \end{cases}$ $\qquad t=-1;0;2;4;6$;

e) $y=\begin{cases} 3x-1, & -\infty<x<-5, \\ x+1, & -5\le x<0, \\ x^3, & 0\le x<\infty \end{cases}$ $\qquad x=-6;-5;-2;0;2$;

f) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ $\quad f\left(-\frac{2}{3}\right)=?$ $\quad f(-2)=?$ $\quad f(x-7)=?$ $\quad f\left(\frac{a}{b}\right)=?$ $\quad f\left(\frac{4}{x}\right)=?$

2. *a*) $y=\frac{x-1}{x^2-4}$; $\qquad$ *b*) $y=\ln(x+2)$; $\qquad$ *c*) $y=\sqrt{3x+4}$.

3. *a*) $y=(x-3)^2+2$; $\qquad$ *b*) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4. *a*) $y=\ln \operatorname{tg}^2 x$; $\qquad$ *b*) $y=3u$, $u=v^3$, $v=\sin x$.

Варіант 22

1. *a*) $f(x)=x^2+3x+5$ $\qquad x=-3;-1;0;2$;

b) $f(x)=x\sin\frac{x}{2}$ $\qquad x=0;\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3};\pi$;

c) $2x-y+1=0$ $\qquad x=-1;0;3;10;15$;

d) $\begin{cases} x=3t, \\ y=t^2-1 \end{cases}$ $\qquad t=-2;0;1;1,5;3$;

e) $y=\begin{cases} 2-x^2, & -\infty<x\le-3, \\ x+1, & -3<x<3, \\ x^3, & 3\le x<\infty \end{cases}$ $\qquad x=-5;-2;0;3;5$;

f) $f(x)=(x+1)(x-2)+\frac{1}{x}$ $\quad f\left(\frac{2}{3}\right)=?$ $\quad f(2)=?$ $\quad f(c)=?$ $\quad f(2+x)=?$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=?$

2. *a*) $y=-x^2+3$; $\qquad$ *b*) $y=\frac{x}{x^2-2x}$; $\qquad$ *c*) $y=\sqrt{-x+1}$.

3. *a*) $y=\frac{1}{x}+3$; $\qquad$ *b*) $y=2\ln(x-1)$.

4. *a*) $y=3^{\operatorname{tg}3x}$; $\qquad$ *b*) $y=5u$, $u=\sqrt[3]{v}$, $v=\operatorname{tg}x$.

Варіант 23

1. *a*) $f(x)=5x-2x^2$ $\quad x=-5;-3;0;\frac{2}{7};$

b) $f(x)=x\sin x$ $\quad x=0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3};$

c) *c*) $3x+2y-1=0$ $\quad x=-8;-3,5;-1,5;0;3;$

d) $\begin{cases} x=t-1, \\ y=2-t^2 \end{cases}$ $\quad t=-1;0;3;4,2;5;$

e) $y=\begin{cases} 2x, & -\infty<x\le -3, \\ x^2, & -3<x<2, \\ 1-x, & 2\le x<\infty \end{cases}$ $\quad x=10;-1;0,5;2,5;2;$

f) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ $\quad f(-1)=?\ \ f(3)=?\ \ f(a)=?\ \ f(2x)=?\ \ f\left(\frac{1}{x}\right)=?$

2. *a*) $y=\ln[x(x-3)]$; $\quad$ *b*) $y=\frac{2-x}{x}$; $\quad$ *c*) $y=\sqrt{7-5x}$.

3. *a*) $y=\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; $\quad$ *b*) $y=\sqrt{x+4}$.

4. *a*) $y=\sin^3\ln(x-1)$; $\quad$ *b*) $y=\sin u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\frac{x+1}{x-1}$.

Варіант 24

1. *a*) $f(x)=x^3-3x^2+1$ $\quad x=-\frac{3}{2};-2;0;1;$

b) $f(x)=\sqrt{x\sin 2x}$ $\quad x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};$

c) $3x-7y+3=0$ $\quad x=-3;-1;0;5;10;$

d) $\begin{cases} x=t+5, \\ y=1-t^2 \end{cases}$ $\quad t=-1;0;0,5;2;5;$

e) $y=\begin{cases} 3-x, & -\infty<x\le 0, \\ x^3, & 0<x<1, \\ 2x, & 1\le x<\infty \end{cases}$ $\quad x=-1;0;0,5;1;2;$

f) $f(x)=x+x^3$ $\quad f(-4)=?\ \ f\left(\frac{1}{3}\right)=?\ \ f\left(\frac{a}{b}\right)=?\ \ f(4x)=?\ \ f(x-2)=?$

2. *a*) $y=\frac{1}{x^2+5x}$; $\quad$ *b*) $y=\sqrt[3]{x+3}$; $\quad$ *c*) $y=\arccos 4x$.

3. *a*) $y=-x^2+5$; $\quad$ *b*) $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

4. $a)$ $y=\sqrt{\cos(x-1)}$; $b)$ $y=u^2$, $u=\sin v$; $v=x^3$.

Варіант 25

1. $a)$ $f(x)=-x^2-3x+5$ $\quad x=-3;-1;0;\frac{5}{4}$;

$b)$ $f(x)=x\arcsin x$ $\quad x=0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1$;

$c)$ $2x-y+1=0$ $\quad x=-1;0;3;10;15$.

$d)$ $\begin{cases} x=3t, \\ y=t^2-1 \end{cases}$ $\quad t=-2;0;1;1,5;3$;

$e)$ $y=\begin{cases} 8x-2, & -\infty<x<-4, \\ x^3+1, & -4\le x<-2, \\ 2x, & -2\le x<\infty \end{cases}$ $\quad x=-5;-4;-3;-2;3$;

$f)$ $f(x)=\sin x+\cos x$ $\quad f(0)=?$ $f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=?$ $f(\pi)=?$ $f(3x)=?$ $f(x+\pi)=?$

2. $a)$ $y=\sin x$; $b)$ $y=\frac{x+1}{x^3-8}$; $c)$ $y=\sqrt{3+2x}$.

3. $a)$ $y+2=x^2$; $b)$ $y=\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. $a)$ $y=3\cdot 2^{\arcsin x^2}$; $b)$ $y=2u$, $u=\sin v$, $v=e^x$.

Варіант 26

1. $a)$ $f(x)=3-x-x^2$ $\quad x=-3;-1;0;\frac{2}{3}$;

$b)$ $f(x)=3x\ln x$ $\quad x=\frac{1}{2};1;e;e^2;10$;

$c)$ $3x+2y+8=0$ $\quad x=-8;-3;0;2;5$;

$d)$ $\begin{cases} x=5t+1, \\ y=3-t^2 \end{cases}$ $\quad t=-2;-0,5;0;3;5$;

$e)$ $y=\begin{cases} x^2-x, & -\infty<x\le-1, \\ x+1, & -1<x\le 2, \\ 2x, & 2<x<\infty \end{cases}$ $\quad x=-2;-1;0;2;3$;

$f)$ $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\frac{x+1}{x-1}$ $\quad f(25)=?$ $f(0)=?$ $f\left(\frac{1}{b^2}\right)=?$ $f(x^2)=?$ $f(x-1)=?$

2. $a)$ $y=3x(x+3)$; $b)$ $y=\frac{x}{9x^2-1}$; $y=\sqrt{1+x^3}$. $e)$

3. $a)$ $y-1=\cos x$; $b)$ $y=3^{x+2}$.

4. $a)$ $y=\arcsin e^{x^2}$; $b)$ $y=-u$, $u=\sqrt{v+1}$, $v=x^3$.

Варіант 27

1. $a)$ $f(x)=x^2-3x+2$ $\quad x=-5;-\frac{2}{7};0;3$;

$b)$ $f(x)=2x\sin 2x$ $\quad x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

$c)$ $2y+5x+1=0$ $\quad x=-8;-3;0;1;4$;

$d)$ $\begin{cases} x=t+1, \\ y=t^2-1 \end{cases}$ $\quad t=-2;-0,5;0;3;5$;

$e)$ $y=\begin{cases} x+5, & -\infty<x<-2, \\ x^2-1, & -2\le x<3, \\ x-3, & 3\le x<\infty \end{cases}$ $\quad x=-3;-2;0;3;5$;

$f)$ $f(x)=x+\frac{1}{x^2}+e^x$ $\quad f(1)=?$ $\quad f(-3)=?$ $\quad f(a)=?$ $\quad f(-x)=?$ $\quad f(x+1)=?$

2. $a)$ $y=\ln(2x-1)$; $b)$ $y=\frac{x-2}{x}$; $c)$ $y=(x^4+1)^{\frac{1}{2}}$.

3. $a)$ $y=(x+2)^3$; $b)$ $y=e^{x-1}$.

4. $a)$ $y=\mathrm{tg}^2(x^2+3x)^3$; $b)$ $y=u^{-1}$, $u=3^v$, $v=x^2$.

Варіант 28

1. $a)$ $f(x)=8-x^3+x$ $\quad x=-5;2;0;\frac{3}{5}$

$b)$ $f(x)=2x\,\mathrm{ctg}\,x$ $\quad x=0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$;

$c)$ $x+5y-1=0$ $\quad x=-3;-1;0;2;5$;

$d)$ $\begin{cases} x=5-3t, \\ y=t+t^2 \end{cases}$ $\quad t=-2;-0,5;0;3;5$;

$e)$ $y=\begin{cases} x+5, & -\infty<x<-2, \\ x^2-1, & -2\le x<3, \\ x-3, & 3\le x<\infty \end{cases}$ $\quad x=-3;-2;0;3;5$;

$f)$ $f(x)=2x+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ $\quad f(4)=?$ $\quad f(9)=?$ $\quad f\left(\frac{1}{4}\right)=?$ $\quad f(x^2+6x+9)=?$ $\quad f\left(\frac{1}{x^2}\right)=?$

2. *a*) $y = 8x - x^2$; *b*) $y = \ln(x^2 - 4)$; *c*) $y = \arcsin 2x$.

3. *a*) $y + 5 = x^3$; *b*) $y = \ln(x + 3)$.

4. *a*) $y = \mathrm{arctg}(\sqrt{\ln x})$; *b*) $y = e^u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \sin x$.

Варіант 29

1. *a*) $f(x) = -(x^2 + x^3) + 5$ $\quad x = -4; -2; 0; \frac{3}{2}$;

b) $f(x) = x \,\mathrm{tg}\, x$ $\quad x = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$;

c) $10x - 3y + 1 = 0$ $\quad x = -8; -3; 0; 2; 5$;

d) $\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = 3 - t \end{cases}$ $\quad t = -1; 0; 3; -10; 20$;

e) $y = \begin{cases} x^2 - 1, & -\infty < x \le -3, \\ x, & -3 < x < 0, \\ -\sqrt{x}, & 0 \le x < \infty \end{cases}$ $\quad x = -5; -3; 0; 1; 4$;

f) $f(x) = (x+1)^2 + x$ $\quad f(0) = ?$ $f(5) = ?$ $f(d) = ?$ $f(-x) = ?$ $f(x^2) = ?$

2. *a*) $y = \arcsin(3x^2 + x + 1)$; *b*) $y = \sqrt{x^2 - 16}$; *c*) $y = e^{x+1}$.

3. *a*) $y = (x+1)^2 - 3$; *b*) $y = 2\sin x$.

4. *a*) $y = e^{2\sin x}$; *b*) $y = 3u$, $u = \mathrm{tg}^2 v$, $v = e^x$.

Варіант 30

1. *a*) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ $\quad x = -10; -\frac{2}{5}; 0; 7$;

b) $f(x) = x\cos x$ $\quad x = 0; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$;

c) $5x - y + 3 = 0$ $\quad x = -7; -1; 0; 4; 5$;

d) $\begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = t - 2 \end{cases}$ $\quad t = -3; 0; 2; 5; 10$;

e) $y = \begin{cases} x - 3, & -\infty < x \le -1, \\ x^3, & -1 < x \le 0, \\ 5 - x^3, & 0 < x < \infty \end{cases}$ $\quad x = -2; -1; -0,5; 0; 1$;

f) $f(x) = x + \frac{2}{x} + \sqrt{x}$ $\quad f(4) = ?$ $f\left(\frac{1}{9}\right) = ?$ $f(x^4) = ?$ $f\left(\frac{25}{b^2}\right) = ?$ $f(5x) = ?$

2. *a*) $y = x^2(1 - x)$; *b*) $y = \ln(x + 8)$; *c*) $y = \frac{x}{2 - x^2}$.

3. *a*) $y = x^3 - 1$; *b*) $y = \sqrt{x+2}$.

4. *a*) $y = \ln^2 \sin(x-1)$; *b*) $y = u^3$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = x^2$.

Завдання 2

1, 2, 3, 4, 5, 6 – обчислити границі функції;

7 – порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$;

8, 9 – дослідити функції на неперервність. Знайти точки розриву функцій і визначити їх тип. Зобразити поведінку функції в околі точки розриву (приклад 8) і побудувати графік функції (приклад 9).

Варіант 1

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{n^2+1}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+4}}{7n\sqrt{n}+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \cdot \sin 3x}{\operatorname{tg}^2 5x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-5}\right)^{3x-1}$. 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$.

7. $\alpha(x) = \sin 3x$, $\beta(x) = \sqrt{1+x} - 1$, якщо $x \to 0$.

8. $y = \dfrac{5}{x-1}$. 9. $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2, & \text{якщо } x \le 2, \\ x+1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

Варіант 2

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+5}{\sqrt{n^2+3}}$. 3. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+8x+15}{3x^2+14x-5}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sin 4x \cdot \sin x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln x - \ln(x+2)\right)$.

7. $\alpha(x) = \cos x - \cos 2x$, $\beta(x) = 1 - \cos x$, якщо $x \to 0$.

8. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$. 9. $y = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x-1}}, & \text{якщо } x < 1, \\ x-3, & \text{якщо } x \ge 1. \end{cases}$

Варіант 3

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{5n^2+4}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^4+1}}$. 3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x^2-3x-10}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x-3}$. 6. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$.

7. $\alpha(x) = \sin(x-2)$, $\beta(x) = \sqrt{2+x} - 2$, якщо $x \to 2$.

8. $y=\dfrac{1}{1-x^3}$.

9. $y=\begin{cases} x+4, & \text{якщо} \quad x<-1, \\ x^2+2, & \text{якщо} \quad -1\le x\le 1, \\ 2x, & \text{якщо} \quad x\ge 1. \end{cases}$

Варіант 4

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2+(n-2)^2}{n^2+2n-1}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{4n+3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+7x-8}{x^3-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^3}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-x}$.

7. $\alpha(x)=\operatorname{arctg}3x$, $\beta(x)=x$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

9. $y=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & \text{якщо} \quad x<1, \\ x-2, & \text{якщо} \quad x\ge 1. \end{cases}$

Варіант 5

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n+5}{2n^3+1}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5n+1}}{n+4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}^2 3x$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+3}\right)^{x+2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. $\alpha(x)=\operatorname{tg}\pi x$, $\beta(x)=x+2$, якщо $x\to -2$

8. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$.

9. $y=\begin{cases} 2x+1, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ \sin x, & \text{якщо} \quad x>0. \end{cases}$

Варіант 6

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+4}{n^2+n}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{n^2+4}}{2n+3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}4x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$.

7. $\alpha(x)=\operatorname{arctg}2x$, $\beta(x)=\sin 3x$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

9. $y=\begin{cases} 9^{\frac{1}{x-2}}, & \text{якщо} \quad x<2, \\ x, & \text{якщо} \quad x\ge 2. \end{cases}$

Варіант 7

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5n+4}{2n^2-3n+7}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+4}{\sqrt{4n^3+5n+1}}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-1}{x^4+2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 4x}{5x^2}$.   5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^x$.   6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2)-\ln(x+5)\big)$.

7. $\alpha(x)=\sin x-\cos x$, $\beta(x)=1-\mathrm{tg}\,x$, якщо $x\to\dfrac{\pi}{4}$.

8. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$.   9. $y=\begin{cases} x+2, & \text{якщо} \quad x\le -1,\\ x^2+1, & \text{якщо} \quad -1<x\le 1,\\ 3-x, & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$

Варіант 8

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5n+1}{3n+7}$.   2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5+4}}{7n\sqrt[3]{n^2}+1}$.   3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$.   5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{x^3+2}\right)^{2x}$.   6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$.

7. $\alpha(x)=1-x^2$, $\beta(x)=\sin\pi x$, якщо $x\to 1$.

8. $y=4^{\frac{1}{x^2-1}}$.   9. $y=\begin{cases} -x, & \text{якщо} \quad x\le 0,\\ -(x-1)^2, & \text{якщо} \quad 0<x<2,\\ x-3, & \text{якщо} \quad x\ge 2.\end{cases}$

Варіант 9

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n-1)^2}{(n+1)^2-n^2}$.   2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{8n^3+3n^2-1}}{5n+1}$.   3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\mathrm{tg}^2 3x}$.   5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.   6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

7. $\alpha(x)=1-x$, $\beta(x)=\mathrm{ctg}\dfrac{\pi x}{2}$, якщо $x\to 1$.

8. $y=\dfrac{x}{x^3-8}$.   9. $y=\begin{cases} x+2, & \text{якщо} \quad x\le 3,\\ 4^{\frac{1}{3-x}}, & \text{якщо} \quad x>3.\end{cases}$

Варіант 10

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-2n^2+41}{n^3+10n^2+12}$.   2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+3}{\sqrt{n^4+n^3+1}}$.   3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{\mathrm{tg}\,5x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{3x^2+4x-7}$.   5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x+1}$.   6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\sin x}$.

7. $\alpha(x)=1-\sin\dfrac{x}{2}$, $\beta(x)=\pi-x$, якщо $x\to\pi$.

8. $y=2^{-\frac{1}{x^2}}$.

9. $y=\begin{cases}\cos x, & \text{якщо} \quad x\le 0,\\ x^2+1, & \text{якщо} \quad 0<x<1,\\ x, & \text{якщо} \quad x\ge 1.\end{cases}$

Варіант 11

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^2+(n+2)^2}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n+7}}{4n+3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+5x-14}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{6x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-9}\right)^{2x-3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+8}-\sqrt{7x+2}}$.

7. $\alpha(x)=1-2\cos x$, $\beta(x)=\pi-3x$, якщо $x\to\dfrac{\pi}{3}$.

8. $y=\dfrac{x+3}{9-x^2}$.

9. $y=\begin{cases}-2x, & \text{якщо} \quad x\le 0,\\ x^2+1, & \text{якщо} \quad 0<x\le 1,\\ x, & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$

Варіант 12

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+n-5}{4n^4-2n-11}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+7}{\sqrt{n^2+2n+3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-5}\right)^{2x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}(9x-8)^{\frac{1}{1-x}}$.

7. $\alpha(x)=\operatorname{tg} x-\sin x$, $\beta(x)=x^3$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{1}{x(x+6)}$.

9. $y=\begin{cases}4^{\frac{1}{x-1}}, & \text{якщо} \quad x<1,\\ x+2, & \text{якщо} \quad x\ge 1.\end{cases}$

Варіант 13

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+2x+1}{6x^3+x^2-x+1}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+3n+1}}{n\sqrt{n}+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{6x+5x^2}-\sqrt{5x^2+1}\right)$.

7. $\alpha(x)=1-\cos x$, $\beta(x)=x^2$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{4-x}{x(x-2)}$.

9. $y=\begin{cases}2x+1, & \text{якщо} \quad x\le 0,\\ x^2-3, & \text{якщо} \quad x>0.\end{cases}$

Варіант 14

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(2n+1)^2}{(n+6)^2-(n+1)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n^3}}{5n\sqrt{n}+3}$. 3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\operatorname{tg}2x}{1-\cos x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-5x}{3x^2-5x+7}\right)^{x+1}$. 6. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7. $\alpha(x)=x^2-25$, $\beta(x)=\sqrt{4+x}-3$, якщо $x\to5$.

8. $y=\dfrac{2x+3}{x^2-25}$. 9. $y=\begin{cases}2x-1, & \text{якщо } x\le1,\\ 3^{\frac{1}{1-x}}, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$

Варіант 15

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^2-(n+5)^2}{(n+1)^2+(2n+3)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+4}{\sqrt{4n^3+5n+1}}$. 3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot\sin5x}{\operatorname{tg}^2 3x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x-1}\right)^{5x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln x-\ln(x+2)\right)$.

7. $\alpha(x)=\sin5x$, $\beta(x)=\sin2x$, якщо $x\to0$.

8. $y=\dfrac{7}{x-3}$. 9. $y=\begin{cases}3^{\frac{1}{x}}, & \text{якщо } x<0,\\ x+2, & \text{якщо } x\ge0.\end{cases}$

Варіант 16

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-2n}{(n+1)^2-(n+4)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5n+1}}{n+4}$. 3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\cos5x-\cos x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-2}\right)^{x}$. 6. $\lim\limits_{x\to2}\left(2x-3\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

7. $\alpha(x)=\sin\pi x$, $\beta(x)=1-x^2$, якщо $x\to1$.

8. $y=5^{\frac{1}{x(x-2)}}$. 9. $y=\begin{cases}x^2-10, & \text{якщо } x\le4,\\ 3^{\frac{1}{4-x}}, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$

Варіант 17

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n+1)^2-(n-1)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+n+5}{\sqrt{n^3+2}}$. 3. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{20+x-x^2}{3x^2-11x-20}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{2x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+5}\right)^{2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

7. $\alpha(x)=\sqrt{x}-1$, $\beta(x)=\sin\pi x$, якщо $x\to 1$.

8. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

9. $y=\begin{cases}2x+1, & \text{якщо } x\le 0,\\ x^2-3, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$

Варіант 18

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2+(n+4)^2}{(n+3)^2-(n+4)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{4n+3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{10x\cdot \operatorname{tg}3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{x+4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{9x+7}-4}{x^2-1}$.

7. $\alpha(x)=x^2-1$, $\beta(x)=\sin 2\pi x$, якщо $x\to 1$.

8. $y=\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$.

9. $y=\begin{cases}-x, & \text{якщо } x\le 0,\\ x^2, & \text{якщо } 0<x\le 2,\\ x+1, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$

Варіант 19

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n+2)^2}{(n+4)^2+(n+5)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5+4}}{7n\sqrt[3]{n^2}+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{x^2+9x-22}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\cdot\sin 2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+4}\right)^{2x+5}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

7. $\alpha(x)=x-8$, $\beta(x)=\sqrt[3]{x}-2$, якщо $x\to 8$.

8. $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$.

9. $y=\begin{cases}2x-5, & \text{якщо } x\le 5,\\ 8^{\frac{1}{5-x}}, & \text{якщо } x>5.\end{cases}$

Варіант 20

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^2-(n-2)^2}{n^2+2n-3}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^6+3n+1}}{5n^2+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+6}\right)^{2x+3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2x}+2\right)+\ln 2x}{x}$.

7. $\alpha(x)=3-\sqrt{5+x}$, $\beta(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$, якщо $x\to 4$.

8. $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$.

9. $y=\begin{cases}-x, & \text{якщо } x\le 0,\\ \sin x, & \text{якщо } 0<x\le\pi,\\ x-2, & \text{якщо } x>\pi.\end{cases}$

Варіант 21

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-2)^2}{(n+4)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{\sqrt{n^2+1}}$. 3. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2+2x-48}{36-x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\operatorname{tg} x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x+3}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\big(\ln(x+3)-\ln x\big)$.

7. $\alpha(x)=1-\sqrt{5-x}$, $\beta(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$, якщо $x\to 4$.

8. $y=\dfrac{1}{x(x+4)}$. 9. $y=\begin{cases} x+3, & \text{якщо} \quad x\le 1, \\ 4^{\frac{1}{1-x}}, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$

Варіант 22

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2}{(n+1)^2-(n-1)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+6}}{5n\sqrt{n}+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+7x+5}{x^3+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^4 2x}{x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x^2}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2}\big(\ln(x-1)-\ln x\big)$.

7. $\alpha(x)=x^2-2x$, $\beta(x)=\sqrt{2x+5}-3$, якщо $x\to 2$.

8. $y=\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$. 9. $y=\begin{cases} -(x+1), & \text{якщо} \quad x\le -1, \\ (x+1)^2, & \text{якщо} \quad -1<x\le 0, \\ x, & \text{якщо} \quad x>0. \end{cases}$

Варіант 23

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2+5n^2}{3n^2+4n}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{\sqrt{n^4+1}}$. 3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 6x}{x\cdot\sin x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-7}\right)^{3x+2}$. 6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+x-30}{\sqrt{3x+1}-4}$.

7. $\alpha(x)=2-\sqrt{9-x}$, $\beta(x)=\sin\dfrac{2\pi}{5}x$, якщо $x\to 5$.

8. $y=\dfrac{x+2}{x^2-9}$. 9. $y=\begin{cases} x^2-2, & \text{якщо} \quad x\le 2, \\ 2^{\frac{1}{2-x}}, & \text{якщо} \quad x>2. \end{cases}$

Варіант 24

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^2-8n^2}{(1+2n)^2+4n^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{5n+2}}$. 3. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{5x^2+9x-44}{2x^2+5x-12}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{1-\cos x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x}\right)^{x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2)-\ln(x+3)\big)$.

7. $\alpha(x)=x^2-1$, $\beta(x)=\operatorname{tg}\pi x$, якщо $x\to 1$.

8. $y=\dfrac{1}{(x+3)^2}$. 9. $y=\begin{cases}-x^2, & \text{якщо} \quad x\le 0,\\ \operatorname{tg}x, & \text{якщо} \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 2, & \text{якщо} \quad x\ge \dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

Варіант 25

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2}$. 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+4x-39}{9-x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 2x}{3x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-5}\right)^{x+2}$. 6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x+3}}$.

7. $\alpha(x)=\cos 5x-\cos x$, $\beta(x)=\sqrt{4+x}-2$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{2x+1}{1-x^3}$. 9. $y=\begin{cases}2^{\frac{1}{x+3}}, & \text{якщо} \quad x<-3,\\ x+5, & \text{якщо} \quad x\ge -3.\end{cases}$

Варіант 26

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2+(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{n^2+3}}{5n+2}$. 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+x-21}{x^2-9}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(\dfrac{x}{3}+1)-\ln\dfrac{x}{3}\right)$.

7. $\alpha(x)=\cos 3x-\cos x$, $\beta(x)=\sin^2 x$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{4x^2+9}{x}$. 9. $y=\begin{cases}x^2-2, & \text{якщо} \quad x\le 2,\\ x+3, & \text{якщо} \quad x>2.\end{cases}$

Варіант 27

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^3+(1+n)^3}{(1+n)^2-(1-n)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+n\sqrt{n}}{\sqrt{4n^3+3n+1}}$. 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x^2+2x-15}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{3x-2}$. 6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

7. $\alpha(x)=x^2+2x-3$, $\beta(x)=\sqrt{4+x}-2$, якщо $x\to 1$.

8. $y=\dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$.

9. $y=\begin{cases}2x-3, & \text{якщо} \quad x\le 3,\\ 2^{\frac{1}{3-x}}, & \text{якщо} \quad x>3.\end{cases}$

Варіант 28

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3+n)^3+(4+n)^3}{(3+n)^2-(4+n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{8n^3+5n^2-1}}{2n+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x-34}{x^2+x-6}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x^2\sin 2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x}\right)^{2x+5}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

7. $\alpha(x)=x^3-8$, $\beta(x)=1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}$, якщо $x\to 2$.

8. $y=\dfrac{11}{x^2-1}$.

9. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & \text{якщо} \quad x\le 4,\\ x+1, & \text{якщо} \quad x>4.\end{cases}$

Варіант 29

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(2+n)^2}{(1-n)^2-(1+n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+7n+3}{\sqrt{n^4+n^3+5}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin^2 3x}{\sin^3 5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-2}{6x-1}\right)^{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2x}-5\right)+\ln 2x}{3x}$.

7. $\alpha(x)=\sqrt{x+7}-3$, $\beta(x)=x^2+x-6$, якщо $x\to 2$.

8. $y=\dfrac{1}{x^2+10x+21}$.

9. $y=\begin{cases}x-5, & \text{якщо} \quad x\le 2,\\ 4^{\frac{1}{2-x}}, & \text{якщо} \quad x>2.\end{cases}$

Варіант 30

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n+5}}{4n+7}$.

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-2x-16}{4x^2-16}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 9x}{5x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

7. $\alpha(x)=1-\cos^2 x$, $\beta(x)=2x^2$, якщо $x\to 0$.

8. $y = \dfrac{x+5}{x^2-4}$.

9. $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{якщо} \quad x < 4, \\ 1, & \text{якщо} \quad x \geq 4. \end{cases}$

ПРИКЛАДИ ТЕСТІВ

Теоретичні питання

1. Якщо кожному значенню x із множини X відповідає тільки одне значення y із множини Y, то кажуть:

a) на множині Y задана функція $y = f(x)$;

b) на множині X задана функція $y = f(x)$;

c) на множині X задана функція $x = f(y)$;

d) на множині Y задана функція $x = f(y)$.

2. Якщо функція задана у вигляді $z = \varphi(y)$, то:

a) y – аргумент, z – функція;

b) y – функція, z – аргумент;

c) $\varphi(y)$ – аргумент, z – функція;

d) y – аргумент, $z(\varphi)$ – функція.

3. Нерівність $|x| > a$ еквівалентна нерівностям:

a) $-a < x < a$; b) $x > -a, x > a$; c) $x < -a, x > a$; d) $x < -a, x < a$.

4. Нерівність $|x| < a$ еквівалентна нерівностям:

a) $a < x < -a$; b) $-a \leq x \leq a$; c) $x < -a, x > a$; d) $-a < x < a$.

5. Область визначення функції $y = f(x)$ це:

a) множина значень x, для яких функція $y = f(x)$ додатна;

b) множина значень x, для яких функція $y = f(x)$ існує;

c) множина значень x, для яких функція $y = f(x)$ не дорівнює нулю;

d) множина значень y, для яких функція $y = f(x)$ існує.

6. Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо для будь-яких x:

a) $f(-x) = f(x)$ і її графік симетричний відносно початку координат;

b) $f(-x) = -f(x)$ і її графік симетричний відносно початку координат;

c) $f(-x) = f(x)$ і її графік симетричний відносно осі Ox;

d) $f(-x) = f(x)$ і її графік симетричний відносно осі Oy.

7. Функція $y = f(x)$ називається спадною на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 із інтервалу таких, що:

a) $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$;

b) $x_1 \leq x_2$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$;

c) $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$;

d) $x_1 > x_2$ виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

8. Функція $y = f(x)$ називається монотонною на деякому інтервалі, якщо на цьому інтервалі:

a) функція зростаюча;
b) функція зростаюча або спадна;
c) функція спадна;
d) функція стала.

9. Яка з перелічених функцій буде обмеженою?

a) $y = \operatorname{tg} x$; b) $y = \cos x$; c) $y = \ln x$; d) $y = x^3$.

10. Яка з перелічених функцій буде зростаючою?

a) $y = \log_3 x$; b) $y = -x$; c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; d) $y = 3$.

11. Задана функція $y = 3^x$. Тоді обернена до неї функція буде мати вигляд:

a) $y = \frac{1}{3^x}$; b) $x = 3^y$; c) $x = \log_3 y$; d) $x = \frac{1}{3^y}$.

12. Графік функції $y = f(x) + a$ ($a > 0$) можна одержати із графіка функції $y = f(x)$, якщо його паралельно зсунути:

a) вздовж осі *Ox* ліворуч;
b) вздовж осі *Ox* праворуч;
c) вздовж осі *Oy* униз;
d) вздовж осі *Oy* догори.

13. Графік функції $y = f(x + a)$ (де $a < 0$) можна одержати із графіка функції $y = f(x)$, якщо його паралельно зсунути:

a) вздовж осі *Ox* ліворуч;
b) вздовж осі *Ox* праворуч;
c) вздовж осі *Oy* униз;
d) вздовж осі *Oy* догори.

14. Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою, якщо

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \infty$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,00001$.

15. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція, а $f(x)$ – обмежена, то їх добуток:

a) буде нескінченно малою функцією;
b) буде обмеженою функцією;
c) буде прямувати до $-\infty$;
d) буде сталою величиною.

16. Яка з перелічених послідовностей буде нескінченно малою?

a) $x_n = (-1)^n \cdot (n+5)$; b) $x_n = (n+5)^{-1}$;

c) $x_n = \dfrac{1}{e^{100000}}$; d) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{4}$.

17. Яка з перелічених послідовностей буде нескінченно великою?

a) $x_n = 5^{100000}$; b) $x_n = n \cdot \cos\dfrac{\pi n}{2}$; c) $x_n = 2^n$; d) $x_n = 2^{-n^2}$.

18. Який з перелічених нижче виразів не буде невизначеністю?

a) $\infty - \infty$; b) ∞^0; c) $\dfrac{\infty}{\infty}$; d) $\dfrac{\infty}{0}$.

19. Перша чудова границя має вигляд:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \text{const}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

20. Нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними, якщо:

a) $\lim\left[\alpha(x)\cdot\beta(x)\right] = 0$; b) $\lim\left[\alpha(x)\cdot\beta(x)\right] = 1$;

c) $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$; d) $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Відповіді: 1. b); 2. a); 3. c); 4. d); 5. b); 6. d); 7. c); 8. b); 9. b); 10. a); 11. c); 12. d); 13. b); 14. b); 15. a); 16. b); 17. c); 18. d); 19. d); 20. c).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДІВ

1. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-1}{3x^2+2}$?

Варіанти відповіді: a) 0; b) ∞; c) $\dfrac{2}{3}$; d) $-\dfrac{1}{2}$.

2. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{8x^2+2x+1}$?

Варіанти відповіді: a) 0; b) ∞; c) $\dfrac{3}{8}$; d) 4.

3. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{4x-1}{2x+x^2}$?

Варіанти відповіді: a) 2; b) 0; c) ∞; d) -1.

4. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 4x}$?

Варіанти відповіді: a) 0; b) $\dfrac{1}{4}$; c) 4; d) 1.

5. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}$?

Варіанти відповіді: a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) ∞.

6. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$?

Варіанти відповіді: a) 0; b) 3; c) -2; d) 1.

7. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$?

Варіанти відповіді: a) $\dfrac{1}{4}$; b) 4; c) 0; d) -2.

8. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$?

Варіанти відповіді: a) $3e$; b) 3; c) $\dfrac{1}{3}$; d) e^3.

9. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x}$?

Варіанти відповіді: a) $5e$; b) $\frac{1}{e^5}$; c) e^5; d) $\frac{e}{5}$.

10. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+8x\right)^{\frac{2}{x}}$?

Варіанти відповіді: a) $16e$; b) 16; c) $\frac{e}{16}$; d) e^{16}.

Відповіді: 1. c); 2. a); 3. b); 4. b); 5. c); 6. b); 7. a); 8. d); 9. b); 10. d).

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М: Наука,1980. – Т. 1.

2. Овчинников П. П. Вища математика / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К.: Техніка, 2000. – Ч. 1.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука. – Т. 1.

4. Смирнов В. М. Курс высшей математики. – М.: Просвещение, 1974. – Т. 1.

5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.

6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980. – Ч. 1.

7. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Н. В. Міхєєва, В. О. Петренко

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 3
Частина 2

Редактор *Т. В. Мацкевич*
Комп'ютерна верстка *Т. В. Шевченко*

Підписано до друку 25.05.2007. Формат 60х84 1/16. Папір для множних апаратів. Ризограф. Ум. друк. арк. 2,43. Обл.-вид. арк. 2,7.
Тираж 300 прим. Зам. № 885. Вид. № 77.

Видавництво Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна
ДК № 1315 від 31.03.2003
Адреса видавництва та дільниці оперативної поліграфії:
49010, Дніпропетровськ, вул. Лазаряна, 2
www.diitrvv.dp.ua, admin@diitrvv.dp.ua