МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Кафедра «Вища математика»

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 3
Частина 1

Укладачі: Т. М. Бусарова
О. В. Звонарьова
Н. В. Міхєєва
В. О. Петренко

Для студентів першого курсу усіх спеціальностей

Дніпропетровськ 2007

УДК 512.8

Укладачі:
Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Н. В. Міхєєва, В. О. Петренко

Рецензенти:
канд. фіз.-мат. наук, доц. *В. Л. Велікін (ДНУ)*
канд. фіз.-мат. наук, доц. *Т. Ф. Михайлова* (ДІІТ)

Вступ до математичного аналізу. Модуль 3: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 1 / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна; Уклад.: Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Н. В. Міхєєва, В. О. Петренко. – Д., 2007. - 58 с.

Методичні рекомендації призначаються для студентів першого курсу всіх спеціальностей. Містять основний теоретичний матеріал розділу, велику кількість розв'язаних прикладів, тридцять варіантів індивідуальних домашніх завдань, а також приклади тестових завдань з наведеними відповідями.

Бібліогр.: 5 наймен.

ВСТУП

Дані методичні вказівки стосовно застосування модульної системи навчання є модулем 3, тобто одним із системи модулів, в яких закладені основні розділи з дисципліни «Вища математика». Ці розділи (модулі) об'єднані за змістом із врахуванням відведеного часу на вивчення усього курсу з вищої математики.

Із метою контролю вивчення та опанування основ вищої математики кожен модуль є заліковим з обов'язковим оцінюванням якості засвоєння матеріалу студентами згідно з прийнятою в університеті бальною системою.

Засобами діагностики успішності навчання є комплекти індивідуальних завдань та комплекти тестових завдань для складання контрольних заходів (залік, модульний контроль, екзамен).

Пропонується такий розподіл основних розділів у вивченні курсу вищої математики по семестрах:

1 курс

МК 1 (І семестр, 1-ша половина). Векторна і лінійна алгебра.

МК 2 (І семестр, 2-га половина). Аналітична геометрія.

Дії над векторами, матриці, визначники. Рівняння ліній, площин. Зображення ліній на площині та у просторі.

МК 3 (ІІ семестр, 1-ша половина). Функції, границя, неперервність функцій.

МК 4 (ІІ семестр, 2-га половина). Диференціальне числення.

Основні поняття, обчислення граничних значень, точки розриву функції. Схематичне зображення графіків функцій (однієї змінної). Похідна та її застосування до практичних задач.

2 курс

МК 5 (ІІІ семестр, 1-ша половина). Невизначений інтеграл.

МК 6 (ІІІ семестр, 2-га половина). Визначений інтеграл.

Первісна функції. Основні методи знаходження. Визначений інтеграл. Обчислення і застосування до задач геометрії, фізики, механіки.

МК 7 (IV семестр, 1-ша половина). Звичайні диференціальні рівняння.

МК 8 (IV семестр, 2-га половина). Ряди.

Основні типи рівнянь, які допускають розв'язок у квадратурах.

Числові і степеневі ряди.

1. ЗМІННІ І СТАЛІ ВЕЛИЧИНИ

Означення. Змінною величиною називається величина, яка приймає різні числові значення.

Величина, числові значення якої не змінюються, називається **сталою величиною**. Цю величину можна розглядати як окремий випадок змінної величини.

Значення змінної величини геометрично можна зобразити точками числової осі.

Означення. Сукупність усіх числових значень змінної величини називається **областю змінювання** цієї величини (цю сукупність будемо називати множиною X).

Перелічимо області змінювання величин, які будуть зустрічатися в подальшому.

Означення. Проміжком, або **інтервалом,** називається сукупність усіх чисел x, які містяться між даними числами a і b ($a < b$), причому самі ці числа не належать до сукупності. Позначається це так: (a,b) або за допомогою нерівностей: $a<x<b$.

Означення. Сегментом, або **відрізком** називається сукупність усіх чисел x, які містяться між даними числами a і b ($a<b$), причому ці числа належать розглянутій сукупності. Позначається це так: $[a,b]$ або $a \le x \le b$.

Іноді відрізок називають замкненим проміжком, або **замкненим інтервалом**.

Якщо сукупність чисел x задовольняє нерівностям $a \le x < b$, то будемо мати **полуінтервал**, який позначають так: $[a,b)$. І навпаки: $a < x \le b$, або $(a,b]$. Таким же чином можна розглянути нескінченні, або напівнескінченні інтервали, або полуінтервали:

$$-\infty < x < \infty, (-\infty,+\infty); \quad -\infty < x < a, (-\infty,a); \quad a \le x < \infty, [a,+\infty) \text{ і т. д.}$$

Означення. Змінна x називається **упорядкованою змінною величиною**, якщо відома область змінювання цієї величини і про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке значення попереднє, а яке наступне.

Важливим окремим випадком упорядкованої величини є так звані числові послідовності. Пізніше вони будуть розглянуті більш докладніше.

2. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

Нехай X – це область змінювання змінної x, а Y – область змінювання змінної y.

Означення. Якщо кожному значенню змінної x із області X можна поставити у відповідність за деяким правилом одне визначене значення змінної y із області Y, то кажуть, що на множині X задана **функція** і записують цю відповідність за допомогою формули $y = f(x)$.

Змінну x називають **незалежною** змінною, або **аргументом**, а змінну y – **залежною** змінною, або **функцією**. (Кажуть, що y є функцією x, або x і y зв'язані функціональною залежністю.)

Множину X називають **областю визначення** функції y і позначають через $D(f)$, а множину Y усіх чисел y, які відповідають різним числам $x \in X$, – **областю значень** функції y і позначають через $E(f)$. Помітимо, що коли числу x_0 із $D(f)$ відповідає число y_0 із $E(f)$, то y_0 називають **значенням функції** у точці x_0.

Приклад. Знайти область визначення (тобто $D(f)$) функцій:

1) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$; 2) $f(x) = \sqrt{7-5x}$; 3) $f(x) = \ln(x+3)$.

Розв'язання. 1. Функція $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$ визначена, якщо її знаменник не дорівнює нулю. Тому область визначення цієї функції знаходиться з умови: $x^2 - 4 \neq 0$, тобто $x_{1,2} \neq \pm 2$. Таким чином, $D(f)$ (тобто область визначення) має вигляд $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ або просто $x \neq \pm 2$.

2. Функція $f(x) = \sqrt{7-5x}$ визначена, якщо підкореневий вираз невід'ємний: $7 - 5x \geq 0$, або $x \leq \dfrac{7}{5}$. Тоді $D(f)$ має вигляд $\left(-\infty, \dfrac{7}{5}\right]$.

3. Вираз під знаком логарифма завжди додатний, тому $x + 3 > 0$ або $x > -3$. Тоді $D(f)$ має вигляд $(-3, +\infty)$.

3. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

Табличний: за цього способу виписуються у визначеному порядку значення аргументу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і відповідні значення функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Прикладом цього способу є таблиці тригонометричних функцій, таблиці логарифмів і т. д.

Графічний: полягає в заданні графіка функції.

Означення. Сукупність точок площини XOY, абсциси яких є значеннями аргументу, а ординати – відповідними значеннями функції, називається графіком даної функції.

Аналітичний: полягає в тому, що наводиться **формула**, за допомогою якої за заданими значеннями аргументу можна знайти відповідні значення функції. Слід зазначити, що цей спосіб задання функції є основним в математичному аналізі. Якщо функція задається аналітично, під **областю визначення** $D(f)$ **функції** $y = f(x)$ розуміють множину X значень x, за яких формула, що визначає функцію, має смисл.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка величина називається змінною, сталою?
2. Що таке область змінювання змінної?
3. Чим відрізняється відрізок від інтервалу?
4. Як означається функція?

5. Як інакше можна назвати незалежну змінну, залежну змінну?
6. Що таке область визначення функції? Як вона позначається?
7. Що таке табличний спосіб задання функції?
8. Що таке графік функції?

4. КЛАСИФІКАЦІЯ ФУНКЦІЙ

4.1. Парні та непарні функції

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **парною**, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Аналогічно функція зветься **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі OY, графік непарної – відносно початку координат.

Приклади парних функцій: $y = \cos x$, $y = x^2$, $y = |x|$.

Приклади непарних функцій: $y = \sin x$, $y = x^3$, $y = \operatorname{arctg} x$.

Слід зазначити, що існують функції, які не є парними або непарними. Наприклад $y = x + 3$, $y = 5^x$.

4.2. Періодичні функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **періодичною,** якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x виконується рівність $f(x+T) = f(x)$.

Якщо функція періодична, то мають місце і такі рівності:

$$f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \ldots = f(x).$$

Найменше додатне число T, за якого умова $f(x+T) = f(x)$ виконується, називається **періодом** функції.

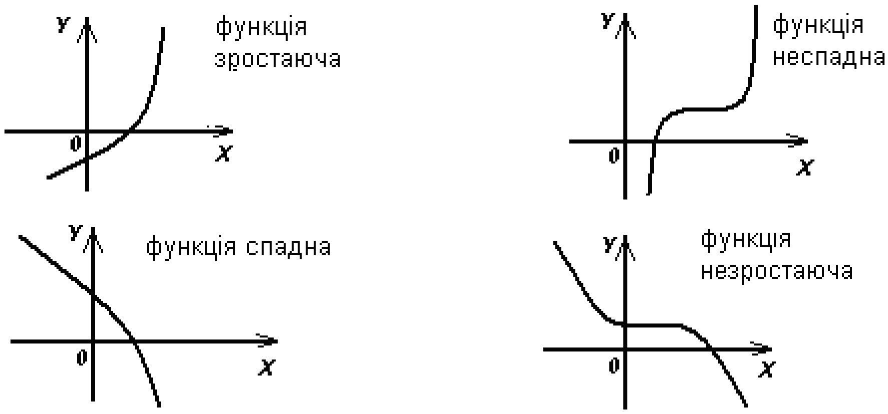
4.3. Монотонні функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **зростаючою** на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Якщо виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається **неспадною**.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **спадною** на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається **незростаючою**.



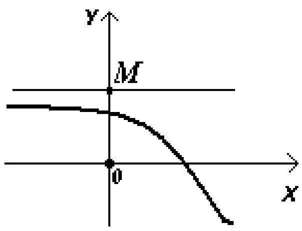
Означення. Функція $y = f(x)$ називається **строго монотонною** на інтервалі, якщо вона зростаюча, або спадна на цьому інтервалі.

Функція **монотонна**, якщо вона неспадна, або незростаюча.

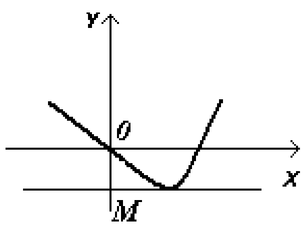
4.4. Обмежені функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою зверху** (**знизу**) на деякому інтервалі, якщо існує таке число M, що $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$) для усіх x із даного інтервалу.

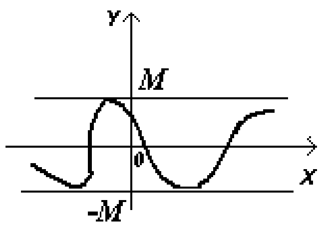
Означення. Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою** на деякому інтервалі, якщо існує число $M > 0$, що для усіх x із інтервалу, виконується нерівність: $|f(x)| \leq M$.



Функція обмежена зверху



Функція обмежена знизу



Функція обмежена

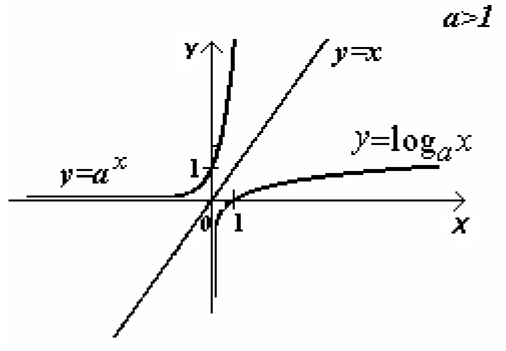
4.5. Обернені функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому інтервалі і, крім того, двом різним значенням x_1 і x_2 з інтервалу відповідають два різних значення функції y_1 і y_2 (тобто функція зростаюча або спадна). Якщо розглядати значення y, як значення аргументу, а значення x як значення функції, то одержимо x як функцію y: $x = \varphi(y)$. Така функція називається оберненою для функції $y = f(x)$. Взагалі, якщо областю визначення функції $y = f(x)$ є множина $D(f)$, а областю значень функції $y = f(x)$ є множина $E(f)$, то для оберненої функції $x = \varphi(y)$ буде навпаки: $E(f)$ – область визначення функції $x = \varphi(y)$, а $D(f)$ – область значень функції $x = \varphi(y)$. Функція $y = a^x$ має обернену функцію $x = \log_a y$. Помітимо, що можна вважати і навпаки:

функція $x = \log_a y$ має обернену функцію $y = a^x$.

Функція $y = x^2$ не має оберненої, оскільки кожному значенню y ($y > 0$) відповідають два значення $x = \pm\sqrt{y}$.

Пряма і обернена функції мають один і той же графік. Але якщо в оберненій функції позначити аргумент через *x*, а функцію – через *y*, тобто записати обернену функцію у вигляді $y = \varphi(x)$, то графіки функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ будуть симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів, тобто прямої $y = x$.



Наприклад: в оберненій функції $x = \log_a y$ x і y поміняємо місцями: $y = \log_a x$. Одержимо дві функції: $y = a^x$ і $y = \log_a x$, графіки яких симетричні відносно прямої $y = x$.

4.6. Складні функції

Нехай $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тоді, якщо область значень функції $u = \varphi(x)$ міститься в області визначення функції $y = f(u)$, то функція $y = f[\varphi(x)]$ називається **складною** функцією, або **композицією** функцій f і φ. Аргумент u називається проміжним аргументом, або внутрішньою функцією.

Приклад. Нехай $y = \cos u$, $u = x^4$. Тоді функція $y = \cos x^4$ – складна.

Зауваження. Складна функція може складатися і з більшої кількості функцій.

Наприклад. Функція $y = \mathrm{ctg}[\ln(2x+1)]$ складена з трьох функцій: $y = \mathrm{ctg}\,t$, $t = \ln u$, $u = 2x + 1$.

4.7. Неявні функції

Нехай функція визначена на множині X.

Означення. Якщо кожне значення аргументу $x \in X$ і відповідне йому значення функції y задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$, то кажуть, що функція задана **неявно**.

Будь-яку функцію $y = f(x)$ можна записати в неявному вигляді: $y - f(x) = 0$.

Наприклад: $y = x^2$ – явний вигляд; $y - x^2 = 0$ – неявний вигляд функції.

Неявна форма задання функції часто зумовлена неможливістю задання функції в явному вигляді. Наприклад, функцію, задану рівнянням $e^y + \sin(x + 2y) = 0$, записати в явному вигляді неможливо.

Приклади функцій, які задані неявно: $x^2 + y^2 = R^2$ – рівняння кола,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – рівняння еліпса, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – рівняння гіперболи.

4.8. Функції, що задані в параметричному вигляді

Розглянемо два рівняння $x = x(t)$ і $y = y(t)$, де t приймає значення з деякого інтервалу (t_1,t_2). Тобто кожному значенню $t \in (t_1,t_2)$ відповідають два значення x і y. Якщо розглядати значення x і y як координати точки на площині XOY, то кожному значенню t буде відповідати визначена точка площини. І коли t буде змінюватись від t_1 до t_2, ця точка, рухаючись на площині, буде описувати деяку криву.

Рівняння
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (1)$$

називаються **параметричними** рівняннями цієї кривої, t називається **параметром**, а спосіб задання кривої рівняннями (1) називається **параметричним** способом задання функції.

Параметричне задання кривих застосовується в механіці. Якщо в площині XOY рухається матеріальна точка і нам відомі закони руху проекцій цієї точки на осі координат, $x = x(t)$, $y = y(t)$, де параметром t є час, то рівняння (1) є параметричними рівняннями траєкторії точки. Якщо виключити з цих рівнянь параметр t, одержимо рівняння траєкторії у вигляді $y = f(x)$ або $F(x, y) = 0$. Але параметр t не завжди має значення часу.

Наприклад. Рівняння кола в параметричному виді має вигляд: $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$

$0 \le t \le 2\pi$, де параметр t – це кут між віссю OX і радіусом, проведеним у деяку точку $M(x, y)$ кола. Виключимо t із рівнянь. Для цього обидва рівняння піднесемо до квадрату, а потім складемо їх:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= R^2\cos^2 t \\ y^2 &= R^2\sin^2 t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

5. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

Спочатку розглянемо **основні** елементарні функції. До них відносять такі функції:

– степенева функція: $y = x^n$, n – дійсне число;

– показникова функція: $y = a^x$, $a > 0, a \ne 1$;

– логарифмічна функція: $y = \log_a x$, $a > 0, a \ne 1$;

– тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

– обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Означення. Функції, які складені з основних елементарних функцій і сталих за допомогою скінченного числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) та за допомогою операції композиції функцій, називаються **елементарними** функціями.

Приклади елементарних функцій: $y = 5\sin 4x - \sqrt{x}$. $y = \dfrac{1 - \mathrm{arctg}^2\, 2x}{3^x + x \cdot \ln x}$.

Помітимо, що елементарну функцію можна задати за допомогою двох, або більше формул:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^3, & -\infty < x \le 1 \\ x - 1, & 1 < x < \infty \end{cases}.$$

Елементарні функції можна розділити на дві групи: алгебраїчні і трансцендентні.

До алгебраїчних функцій належать:

1. Ціла раціональна функція або многочлен (поліном)

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – сталі числа, які називаються коефіцієнтами;

n – ціле додатне число – степінь многочлена.

2. Дробово-раціональна функція – відношення двох многочленів

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

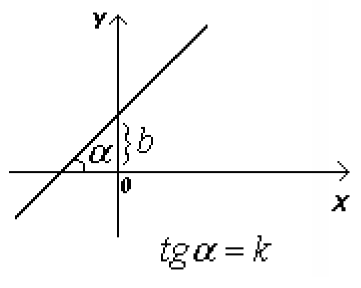
3. Ірраціональна функція – крім арифметичних дій, що виконуються над незалежною змінною, є дія добування кореня.

Наприклад: $y = \sqrt[3]{x}$, $\quad y = \dfrac{3x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{2 + 3x}}$.

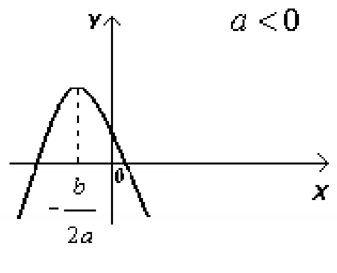
Функція, яка не є алгебраїчною, називається **трансцендентною**. Приклади таких функцій: $y = \cos x$, $\quad y = \sqrt{10^x + 5}$ і т. д.

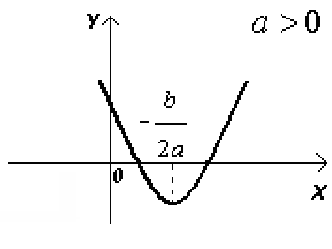
Графіки основних елементарних функцій

1. Лінійна функція $y = kx + b$.



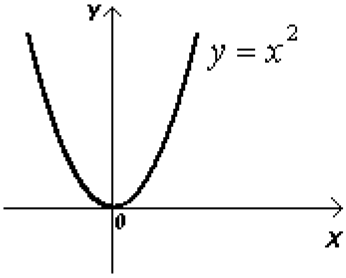
2. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$.

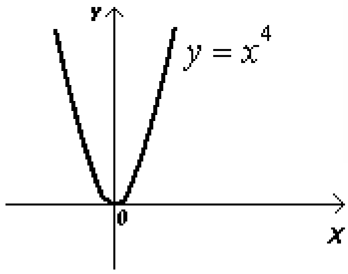




3. Степенева функція $y = x^n$.

Розглянемо лише деякі випадки. Якщо n – парне число, то обидві функції парні.

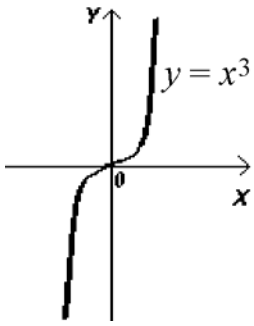


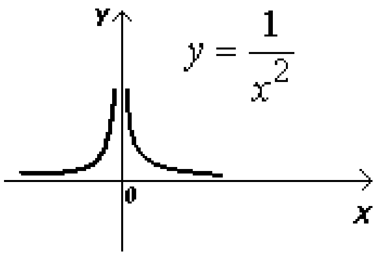


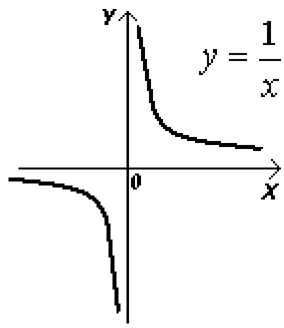
Якщо n – непарне, то, наприклад: $y = x^3$ – функція непарна.

Якщо n – парне від’ємне число, то наприклад, $y = \dfrac{1}{x^2}$ – функція парна.

Якщо n – непарне, від’ємне число, то, наприклад, $y = \dfrac{1}{x}$ – функція непарна.

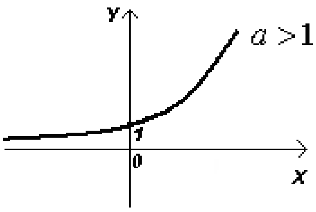




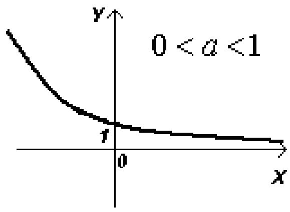


4. Показникова функція $y = a^x$.

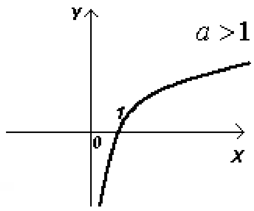
5. Логарифмічна функція $y = \log_a x$.



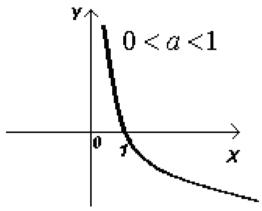
Функція зростаюча



Функція спадна



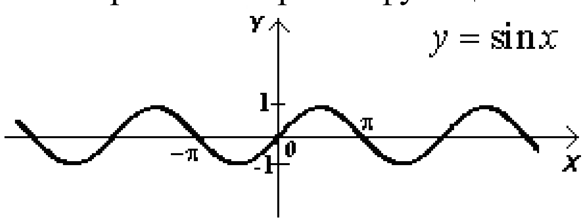
Функція зростаюча



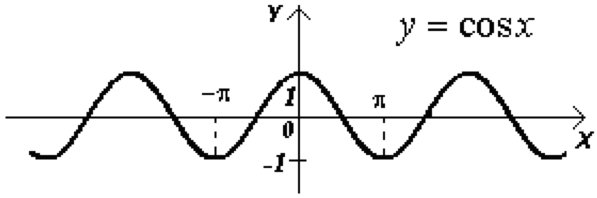
Функція спадна

Із графіків випливає, що наведені показникові та логарифмічні функції строго монотонні.

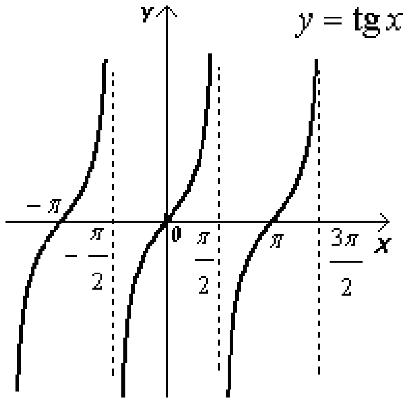
6. Тригонометричні функції:

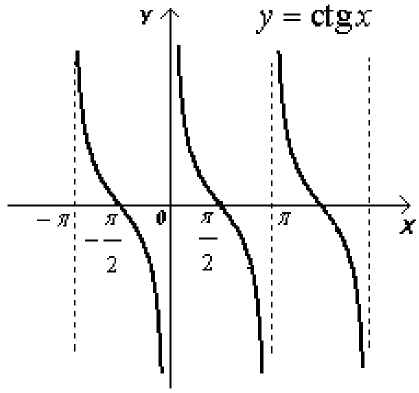


Функція непарна періодична ($T = 2\pi$)



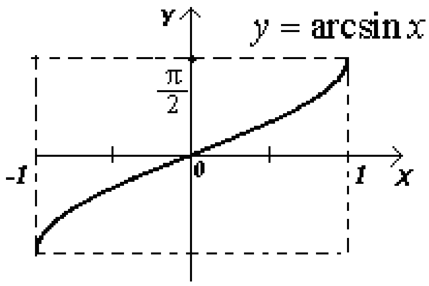
Функція парна періодична ($T = 2\pi$)

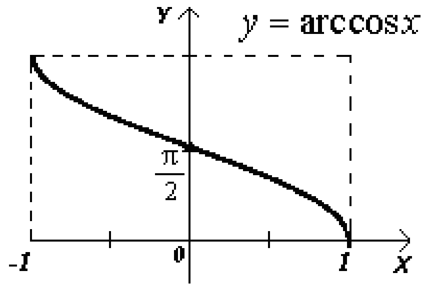




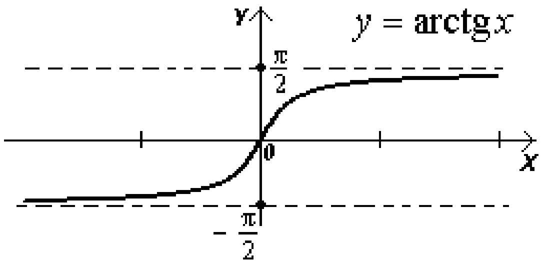
Функція непарна періодична ($T = \pi$) Функція непарна періодична ($T = \pi$)

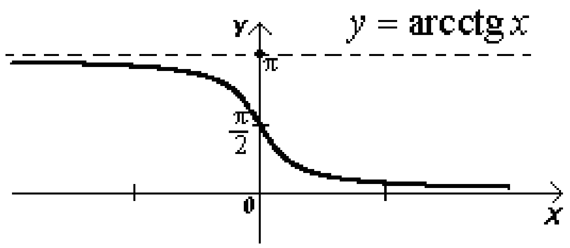
7. Обернені тригонометричні функції:





Функція непарна зростаюча на [-1,1] Функція спадна на [-1,1]

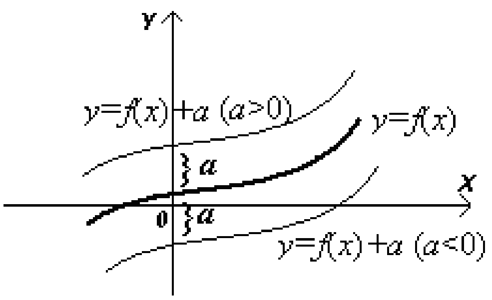


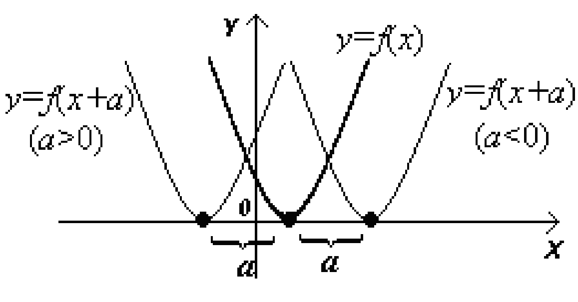


Функція непарна зростаюча Функція спадна

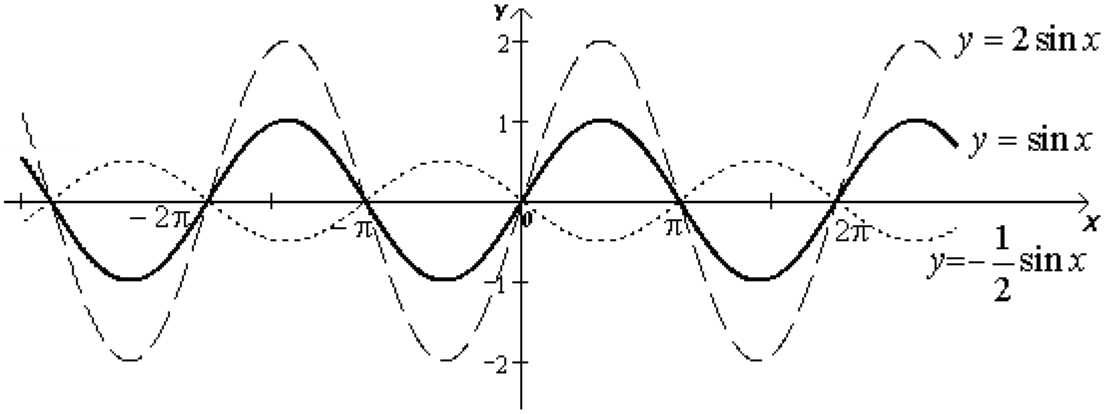
За допомогою розглянутих графіків можна будувати більш складні графіки. Нехай a – дійсне число ($a \neq 0$). Тоді графік функції $y = f(x) + a$ можна одержати, якщо графік $y = f(x)$ паралельно зсунути вздовж осі OY на величину $|a|$. Якщо $a > 0$, графік зсунеться догори, якщо $a < 0$ – графік зсунеться униз.

Для того, щоб побудувати графік $y = f(x + a)$, потрібно графік функції $y = f(x)$ зсунути паралельно вздовж осі OX на відстань $|a|$. Якщо $a > 0$, то графік зсуваємо **ліворуч**, якщо $a < 0$ – **праворуч**.





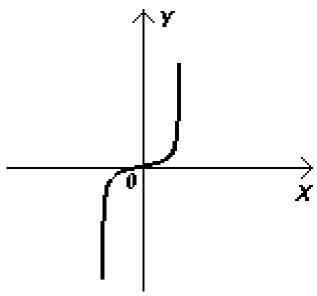
Для того, щоб побудувати графік функції $y = a \cdot f(x)$, потрібно точки $M(x, y)$ графіка $y = f(x)$ замінити точками $M(x, ay)$. Причому, якщо $a > 1$, ординати графіка збільшуються в a разів. Якщо $0 < a < 1$, ординати зменшуються в a^{-1} рази. Якщо $a < 0$, то графік функції $y = a \cdot f(x)$ буде симетричним графіку функції $y = |a| \cdot f(x)$ відносно осі OX.



8. Гіперболічні функції.

Гіперболічний синус: $y = \mathrm{sh}x$,

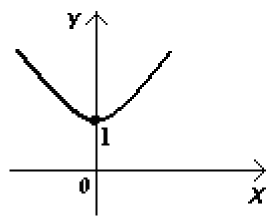
де $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.



Функція непарна зростаюча

Гіперболічний косинус: $y = \mathrm{ch}x$,

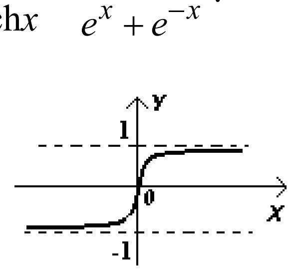
де $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.



Функція парна

Гіперболічний тангенс: $y = \mathrm{th}x$,

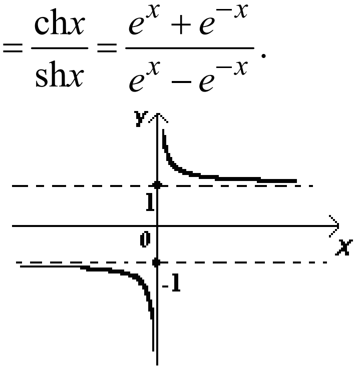
де $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.



Функція непарна зростаюча

Гіперболічний котангенс: $y = \mathrm{cth}x$,

де $\mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.



Функція непарна спадна

Відзначимо, що для гіперболічних функцій мають місце формули, аналогічні з точністю до знака, відповідно формулам для тригонометричних функцій:

$$\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1,\ \mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2 x+\mathrm{sh}^2 x,\ \mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}y \text{ і т. д.}$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка функція називається непарною, парною?
2. Що таке період функції?
3. Яка функція називається зростаючою на інтервалі? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається неспадною на інтервалі?
5. Яка функція називається монотонною (строго монотонною)?
6. Що таке обмежена функція? Наведіть приклади.
7. Що таке обернена функція? Наведіть приклад функції, яка має обернену і функції, яка не має оберненої функції.
8. Напишіть рівняння кола в параметричному виді.
9. Побудуйте графіки функцій:

$$y=a^x;\quad y=\log_a x\,(a>1, 0<a<1);\quad y=\sin x;\quad y=\mathrm{arctg}x.$$

10. Яка функція називається алгебраїчною, трансцендентною?
11. Що таке дробово-раціональна функція?
12. Як побудувати графік функцій $y=x^3-a$, $y=\ln(x+a)$?
13. Чому дорівнює $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}x$?

Приклад. Для функції $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2-1}$ знайти:

1. $f(0)$; 2. $f(-3)$; 3. $f(-x)$; 4. $f(2x)$; 5. $f(a)+3$; 6. $f(a+3)$.

Розв'язання: 1. Підставимо значення $x=0$ у вираз заданої функції

$$f(0)=\frac{2\cdot 0+5}{0^2-1}=-5.$$

2. Аналогічно находимо: $f(-3)=\dfrac{2\cdot(-3)+5}{(-3)^2-1}=\dfrac{-6+5}{9-1}=-\dfrac{1}{8}.$

3. Для того, щоб знайти $f(-x)$, потрібно формально замінити x в формулі для $f(x)$ на $-x$:

$$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)+5}{(-x)^2-1}=\frac{-2x+5}{x^2-1}.$$

4. Аналогічно $f(2x)=\dfrac{2\cdot 2x+5}{(2x)^2-1}=\dfrac{4x+5}{4x^2-1}.$

5. Аналогічно $f(a)+3=\dfrac{2\cdot a+5}{a^2-1}+3=\dfrac{2a+5+3a^2-3}{a^2-1}=\dfrac{3a^2+2a+2}{a^2-1}.$

6. Аналогічно $f(a+3)=\dfrac{2\cdot(a+3)+5}{(a+3)^2-1}=\dfrac{2a+6+5}{a^2+6a+9-1}=\dfrac{2a+11}{a^2+6a+8}.$

Приклад. Для функції $f(z)=\dfrac{\sqrt{z+3}}{z^2}$ знайти:

1. $f(1)$; 2. $f(-2)$; 3. $f(t+1)$; 4. $f(2x-4)$.

Розв'язання: 1. $f(1)=\dfrac{\sqrt{1+3}}{1^2}=2$; 2. $f(-2)=\dfrac{\sqrt{-2+3}}{(-2)^2}=\dfrac{1}{4}$;

3. $f(t+1)=\dfrac{\sqrt{t+1+3}}{(t+1)^2}=\dfrac{\sqrt{t+4}}{(t+1)^2}$; 4. $f(2x-4)=\dfrac{\sqrt{2x-4+3}}{(2x-4)^2}=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{4(x-2)^2}$.

Приклад. Задана функція $\begin{cases} x=2t+3, \\ y=3-t. \end{cases}$

Знайти її значення, коли $t=-1$; $t=0$; $t=3$; $t=-10$.

Розв'язання: Функція задана в параметричному вигляді. Підставимо значення параметра $t=-1$ в задану функцію:

$$\begin{cases} x=2\cdot(-1)+3=1, \\ y=3-(-1)=4, \end{cases} \text{ тому } f(1)=4$$

Аналогічно: $t=0$ $\begin{cases} x=2\cdot 0+3=3, \\ y=3-0=3; \end{cases}$ тому $f(3)=3$.

$$t=3:\ \begin{cases} x=2\cdot 3+3=9, \\ y=3-3=0; \end{cases} \text{ тому } f(9)=0.$$

$$t=-10:\ \begin{cases} x=2\cdot(-10)+3=-17, \\ y=3-(-10)=13; \end{cases} \text{ тому } f(-17)=13.$$

Приклад. Дослідити функції на парність і непарність:

1. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$; 2. $f(x)=e^x+e^{-x}$; 3. $f(x)=x^3\cdot a^x$.

Розв'язання:

1. $f(-x)=\dfrac{2\cdot(-x)}{(-x)^2+5}=-\dfrac{2x}{x^2+5}=-f(x)$, а за означенням це функція непарна.

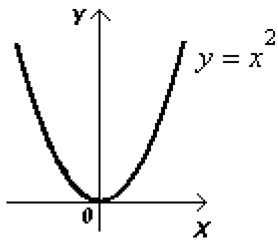
2. $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$ – тобто це функція парна.

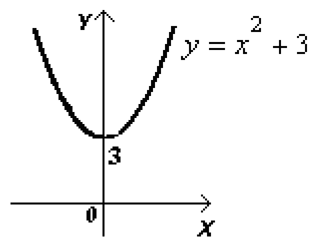
3. $f(-x)=(-x)^3\cdot a^{-x}=-x^3\cdot a^{-x}$, тобто це функція загального виду.

Приклад. Побудувати графіки функцій (за допомогою графіків основних елементарних функцій).

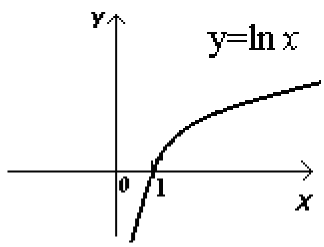
1. $f(x)=x^2+3$; 2. $f(x)=\ln(x-2)$; 3. $f(x)=-2\cos x$.

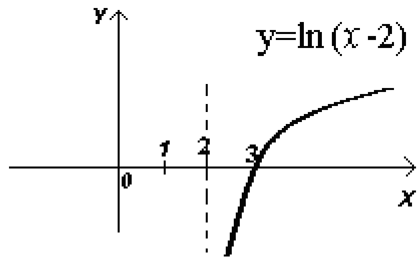
Розв'язання: 1. Побудуємо спочатку графік $y=x^2$, а потім паралельно зсунемо цей графік вздовж осі OY на три одиниці вгору



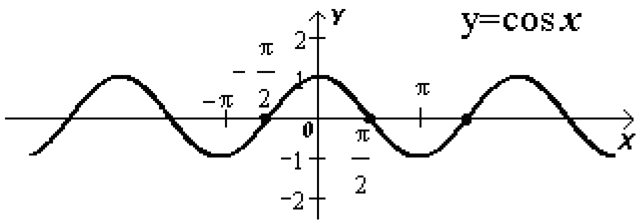


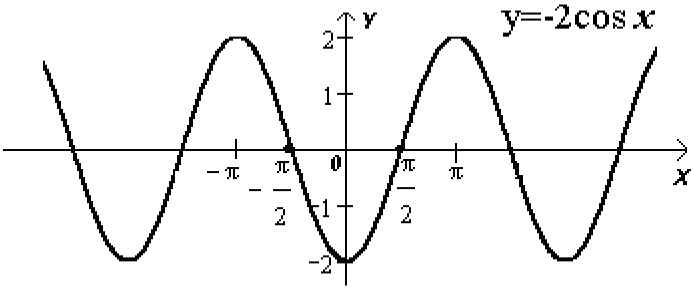
2. Побудуємо спочатку графік $y = \ln x$, а потім паралельно зсунемо його вздовж осі OX на дві одиниці праворуч





3. Усі точки $M(x, y)$ графіка $y = \cos x$ замінимо точками $M_1(x, -2y)$

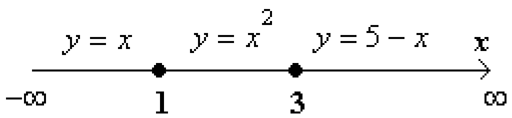




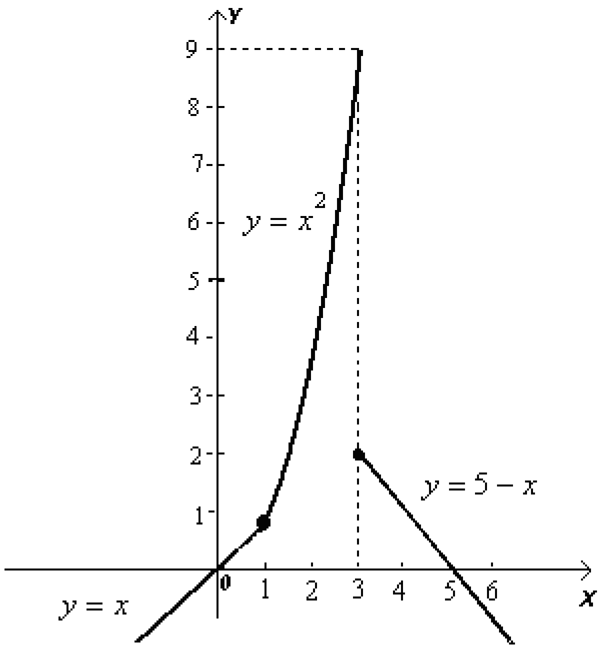
Приклад. Побудувати графік функції.

$$y = \begin{cases} x, -\infty < x < 1 \\ x^2, 1 \le x < 3 \\ 5 - x, 3 \le x < \infty. \end{cases}$$

Розв'язання: Зауважимо, що в умові приведеного прикладу розглядається не три функції (так часто вважають студенти), а одна функція, яка на різних інтервалах задається різними аналітичними виразами:



Побудуємо графік цієї функції



Приклад. Складні функції представити за допомогою ланцюжків, складених з основних елементарних функцій і навпаки:

1. $y = \operatorname{arctg} \ln x$; 2. $y = \sin[2\operatorname{ctg}(x+1)]$; 3. $y = e^{\sqrt[3]{2+x^2}}$;

4. $y = \sqrt[4]{u},\ u = \operatorname{tg} v,\ v = 3x+5$; 5. $y = 2^u,\ u = \dfrac{1}{v^2},\ v = \cos(x-1)$.

Розв'язання: 1. Запишемо функцію таким чином: $y = \operatorname{arctg} u$; $u = \ln x$.

2. Аналогічно: $y = \sin u$; $u = 2\operatorname{ctg} v$; $v = x+1$.

3. $y = e^u$, $u = \sqrt[3]{v}$, $v = 2 + x^2$.

4. Тепер з елементарних функцій утворимо складну функцію $u = \operatorname{tg} v = \operatorname{tg}(3x+5)$, тоді $y = \sqrt[4]{u} = \sqrt[4]{\operatorname{tg}(3x+5)}$.

5. $u = \dfrac{1}{v^2} = \dfrac{1}{\cos^2(x-1)}$, тоді $y = 2^{\frac{1}{\cos^2(x-1)}}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+2)(x-3)}$; 2. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{-8-x}$; 3. $f(x) = e^{\ln x}$.

Приклад 2. Для функції $f(x) = x \cdot \operatorname{tg} x$ знайти: $f(0)$; $f(\pi/6)$; $f(\pi/4)$; $f(\pi/2)$.

Приклад 3. Для функції $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2^x}$ знайти: $f(1), f(0), f(-x), f(2a)$.

Приклад 4. Функція $y = f(x)$ задана в параметричному вигляді

$\begin{cases} x = 8t + 3 \\ y = t^2 \end{cases}$. Знайти її значення, якщо $t = -1$, $t = -\dfrac{1}{2}$, $t = 0$, $t = 2$.

Приклад 5. Дослідити функції на парність і непарність:

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; 2. $f(x) = \cos x^2$; 3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - x^3}$.

Приклад 6. Побудувати графіки функцій (за допомогою графіків основних елементарних функцій):

1. $f(x) = x^3 - 2$; 2. $f(x) = \sqrt{x+2}$; 3. $f(x) = (x+1)^2$; 4. $f(x) = e^{x-1}$.

Приклад 7. Побудувати графік функції

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & -\infty < x < -2; \\ x^2 - 1, & -2 \le x < 3; \\ x - 3, & 3 \le x < \infty. \end{cases}$$

Приклад 8. Складні функції представити за допомогою ланцюжків, складених із основних елементарних функцій і навпаки:

1. $y = 5^{\sin x^3}$; 2. $y = \mathrm{tg}^2[(x^2 - 3x)]$; 3. $y = \arccos^5(\mathrm{ctg} 3x)$;

4. $y = \cos u,\ u = \sqrt{v},\ v = \dfrac{x+1}{x-1}$; 5. $y = 5u,\ u = \dfrac{1}{v^4},\ v = \mathrm{ctg}\, x$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 16x}$; 2. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 10}$; 3. $f(x) = \sqrt{2x - 7}$; 4. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

Відповіді: 1. $x \ne 0, x \ne \pm 4$; 2. $-\infty < x < \infty$; 3. $x \ge \dfrac{7}{2}$; 4. $x > 0, x \ne 1$.

Приклад 2. Для функції $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x - 5}$ знайти: $f(1)$; $f(0)$; $f(5)$; $f(x+5)$; $f(a)$.

Відповіді: $f(1) = -1$; $f(0) = -\dfrac{1}{5}$; $f(5)$ – значення не існує; $f(x+5) = \dfrac{3x^2 + 30x + 76}{x}$; $f(a) = \dfrac{3a^2 + 1}{a - 5}$.

Приклад 3. Для функції $f(x) = \sin 2x$ знайти: $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right)$.

Відповіді: $f(0) = 0$; $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $f(-x) = -\sin 2x$; $f\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) = -\sin 2t$.

Приклад 4. Функція $y = f(x)$ задана в параметричному вигляді $\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = t + 2 \end{cases}$. Знайти її значення, при $t = -2$, $t = 0$, $t = \frac{1}{3}$.

Відповіді: $f(-10) = 0$; $f(0) = 2$; $f(\frac{8}{9}) = \frac{7}{3}$.

Приклад 5. Дослідити функції на парність і непарність:

1. $f(x) = 2 - \cos^2 x$; 2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + x^4}$; 3. $f(x) = x \cdot \cos x$; 4. $f(x) = 2x + 1$.

Відповіді: 1) парна; 2) непарна; 3) непарна; 4) загального виду.

Приклад 6. Побудувати графіки функцій (за допомогою графіків основних елементарних функцій):

1. $f(x) = 2 - x^2$; 2. $f(x) = \sqrt{x - 1}$; 3. $f(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 4. $f(x) = 3^x + 2$.

Приклад 7. Побудувати графік функції

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -\infty < x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Приклад 8. Складні функції представити за допомогою ланцюжків, складених із основних елементарних функцій і навпаки:

1. $y = \ln^3 \operatorname{tg} 4x$; 2. $y = \sqrt[6]{\arcsin 7x}$;

3. $y = u^2$, $u = \cos v$, $v = \log_5 x$; 4. $y = e^u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 3x$.

Відповіді:

1. $y = u^3, u = \ln v, v = \operatorname{tg} t, t = 4x$; 2. $y = \sqrt[6]{u}, u = \arcsin v, v = 7x$;

3. $y = \cos^2 \log_5 x$; 4. $y = e^{\sqrt{3x}}$.

6. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Нагадаємо, що змінною величиною, або просто змінною, називають усяку величину *x*, яка може приймати різні числові значення. Розглянемо важливий клас змінних величин, який будемо називати послідовностями.

Означення. Якщо сукупність усіх можливих значень змінної величини така, що всі ці числа можна занумерувати за допомогою нескінченної кількості номерів 1, 2, 3, ... і розташувати у порядку зростання номерів, тобто записати у вигляді: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$, то таку змінну будемо називати **послідовністю** (**числовою послідовністю**).

Послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ будемо позначати $\{x_n\}$ або просто писати, що x_n – змінна.

Числа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ будемо називати **елементами** (членами) послідовності.

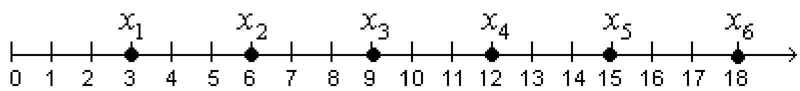
Приклад.

1. $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, ..., x_{50} = 100, ...$ і, взагалі, $x_n = 2n, n = 1,2,3,...$
2. $y_1 = 3, y_2 = 9, y_3 = 27, ...$ і, взагалі, $y_n = 3^n, n = 1,2,3,...$
3. $z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{2}, z_3 = \frac{1}{3}, ...$ і, взагалі, $z_n = \frac{1}{n}, n = 1,2,3,...$
4. $x_1 = a, x_2 = a + d, x_3 = a + 2d, ...$ і, взагалі, $x_n = a + (n-1)d, n = 1,2,3,...$

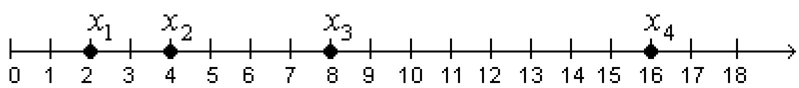
Зауважимо, що послідовність вважається заданою, якщо відоме правило, за допомогою якого за номером n можна знайти, чому дорівнює x_n. Наприклад, якщо задати x_n формулою $x_n = 3n - 1$, то можна одержати будь-яке значення x_n: $x_6 = 3 \cdot 6 - 1 = 17$, $x_{23} = 3 \cdot 23 - 1 = 68$ і т. д. Якщо значення x_n відкладати на числовій осі, то одержимо графічне зображення числової послідовності. Зауважимо, що на такому рисунку ми можемо зобразити лише декілька окремих значень змінної x_n але часто цього буває достатньо для наочного уявлення змінної x_n.

Приклад.

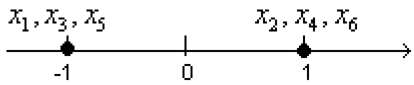
1. $x_n = 3n$



2. $x_n = 2^n$



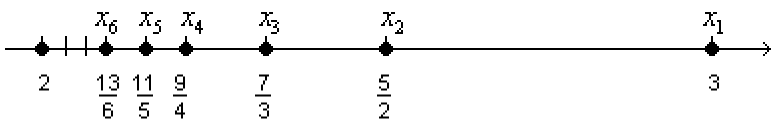
3. $x_n = (-1)^n$



Розглянемо послідовність $x_n = 2 + \frac{1}{n}$:

$x_1 = 2 + \frac{1}{1} = 3$; $x_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; $x_3 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$;

$x_4 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$; $x_5 = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$; $x_6 = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$.



На цьому рисунку видно, що значення змінної підходять «достатньо близько» до сталого числа 2. У цьому випадку кажуть, що 2 є границею послідовності x_n або що x_n прямує до 2.

Розглянемо означення границі послідовності.

Означення. Стале число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для **будь-якого** довільно малого $\varepsilon > 0$ існує число N таке, що для **усіх** (натуральних) $n > N$ буде виконуватися нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

При цьому кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ (або змінна x_n) має границю, що дорівнює a, або кажуть також, що послідовність $\{x_n\}$ (або змінна x_n) збігається до числа a. Помітимо, що номер N взагалі не може бути вибраний раз і назавжди; він залежить від вибору числа ε.

Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ еквівалентна двом нерівностям: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ будемо називати ε-околом точки a.

Дамо тепер геометричне тлумачення поняття границі послідовності.

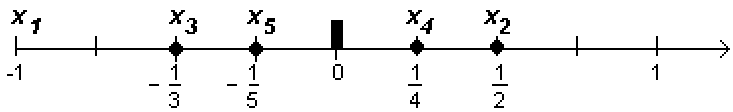
Означення. Число (точка) a є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для **будь-якого** інтервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ можна зазначити такий номер N, починаючи з якого **всі** точки x_n з індексами $n > N$ попадуть в цей інтервал.

Поняття границі послідовності можна сформулювати і таким чином: послідовність $\{x_n\}$ має своєю границею число a, якщо за межами **довільного** ε-околу точки a розміщена **скінченна** кількість елементів послідовності.

На прикладі спробуємо розібратися у сформульованих вище означеннях.

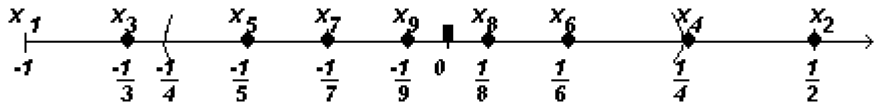
Розглянемо послідовність

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n};\quad x_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -\frac{1}{3};\ x_4 = \frac{1}{4};\ x_5 = -\frac{1}{5}\ \text{і т. д.}$$



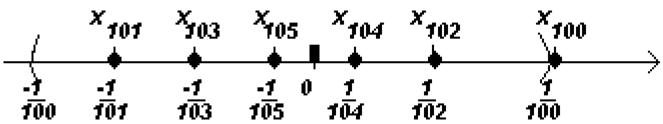
Інтуїтивно можна здогадатися, що границя цієї послідовності дорівнює 0, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Дійсно, задамо, наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (зауважимо, що число ε завжди додатне і достатньо невелике). Тоді так званий ε-окіл буде інтервалом $\left(0 - \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}\right)$ або $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Знайдемо число N, починаючи з якого **усі** члени послідовності попадуть в цей інтервал. За означенням границі послідовності запишемо нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ тут $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $a = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Тобто $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \frac{1}{4}$ або $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \frac{1}{4}$, або $\frac{1}{n} < \frac{1}{4}$ (тому що n завжди додатне число, а

$\left|(-1)^n\right| = 1$). Розв'язок цієї нерівності $n > 4$. Таким чином, за означенням $N = 4$ і починаючи з $n = 5$, **усі** члени послідовності попадуть в інтервал $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Зауважимо, що вираз «всі члени послідовності...» означає, що ні один член послідовності, номер якого більше 4, не опиниться поза межами ε-окола $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.



Тепер візьмемо, наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Побудуємо ε-окіл: $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ і знайдемо номер *N*, починаючи з якого всі члени послідовності попадуть у цей окіл: $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \frac{1}{100}$ або $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$, або $n > 100$.

У цьому випадку $N = 100$, а починаючи з номера $n = 101$, **усі** члени послідовності попадуть в інтервал $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$.



Із розглянутого вище робимо висновок: яке б **мале** ε ми не задавали, **завжди** знайдеться номер N, починаючи з якого, **усі** члени послідовності будуть задовольняти нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, тобто $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

7. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ І НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ПОСЛІДОВНОСТІ (ЗМІННІ)

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ (або змінна x_n) називається **нескінченно малою**, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число *N*, таке, що для усіх $n > N$ буде виконуватись нерівність $|x_n| < \varepsilon$.

У цьому випадку пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, або $x_n \to 0$.

Зауважимо, що сформульоване означення є окремим випадком означення границі послідовності, коли $a=0$. Помітимо, що послідовність $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, розглянута в попередньому параграфі, буде нескінченно малою послідовністю.

Існує інше (простіше) **означення** нескінченно малої послідовності: послідовність, границя якої дорівнює нулю, називається нескінченно малою.

Нескінченно мала послідовність може наближатися до нуля, приймаючи тільки додатні значення $\left(x_n = \frac{1}{n}\right)$ або тільки від'ємні значення $\left(x_n = -\frac{1}{n^2}\right)$ і, нарешті, приймаючи і додатні і від'ємні значення $\left(x_n = \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Зауваження. Термін «нескінченно мала змінна», безумовно, невдалий, оскільки може скластися враження, що величина, про яку іде мова, має дуже малі розміри. Хоча, насправді, мова іде про **характер зміни** цієї величини. Показовим прикладом нескінченно малої є величина

$$x_n = \frac{10000000}{n}.$$

Початкові її значення великі: $x_1 = 10000000$; $x_2 = 5000000$. Але легко бачити, що ця величина все ж таки прямує до нуля (коли $n \to \infty$) і тому є нескінченно малою.

Розглянемо другий приклад: $x_n = 0{,}000000001$.

Ця величина є достатньо мала, але не є нескінченно малою, тому що вона **стала** і при цьому не дорівнює нулю і не прямує до нуля.

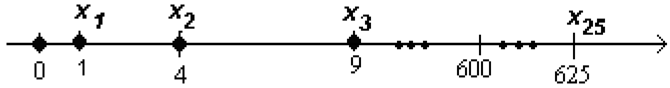
Тепер перейдемо до вивчення нескінченно великих послідовностей (змінних).

Нехай члени деякої послідовності необмежено зростають за абсолютною величиною (коли $n \to \infty$).

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо для **будь-якого** числа $M > 0$ завжди знайдеться такий номер N, починаючи з якого **всі** члени послідовності будуть задовольняти нерівність: $|x_n| > M$ $(n > N)$.

При цьому пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Розглянемо, наприклад, послідовність $x_n = n^2$. Візьмемо число $M = 600$. Починаючи з номера $N = 25$ значення змінної будуть перевищувати задане число *M*.



А оскільки із зростанням номера *n* значення x_n тільки збільшується, то і подальші значення x_n будуть задовольняти нерівність: $x_n > 600$.

Якщо задати ще більше число, наприклад $M = 1000$, то починаючи з номера $N = 32$ $(x_{32} = 32^2 = 1024 > 1000)$ подальші значення x_n будуть більші

$M = 1000$. Взагалі яке б велике додатне число M ми не вибрали, задана змінна з деякого моменту обов'язково його «переросте». Крім того помітимо, що розглянута послідовність приймає тільки додатні значення. Про таку послідовність будемо казати, що вона прямує до «плюс нескінченності»: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Якщо розглянути послідовність $x_n = -\sqrt{n}$, то очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$, тобто вона нескінченно велика і прямує до «мінус нескінченності». А послідовність $x_n = (-1)^n \cdot n$ із членами $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 4,\ldots$ буде просто нескінченно великою, оскільки $|x_n| = n$ і зі зростанням n абсолютні значення її необмежено зростають. Але про цю послідовність не можна сказати, що вона має границю $-\infty$, або $+\infty$, оскільки її члени увесь час змінюють знак.

Зауваження. Термін «нескінченно велика змінна» (як і «нескінченно мала змінна») теж невдалий, оскільки може скластися враження, що величина має дуже великі розміри, хоча, насправді, мова йде про **безмежно** зростаючу змінну.

Наприклад, число $10^{100\,000}$ величезне, але воно стале і до нескінченності не прямує. Навпаки, та змінна, яку ми розглядали вище ($x_n = n^2$) прямує до нескінченності, хоча перші її значення $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9,\ldots$ достатньо невеликі.

Поняття нескінченно великої і нескінченно малої змінних пов'язані між собою.

Теорема. (зв'язок нескінченно великих і нескінченно малих змінних).

Змінна, обернена нескінченно великій, є нескінченно мала змінна, тобто, якщо $x_n \to \infty$, то $1/x_n \to 0$.

Правильність цієї теореми очевидна.

Дійсно, нехай, наприклад, $x_n \to +\infty$. Це означає, що з деякого номера *N*, x_n буде більше, наприклад, 1000. Але тоді дріб $\dfrac{1}{x_n}$ стане менше $\dfrac{1}{1000}$. У процесі своєї зміни x_n стане більше 1000000, але тоді $\dfrac{1}{x_n}$ стане менше $\dfrac{1}{1000000}$, тобто $\dfrac{1}{x_n} \to 0$, а тому ця змінна нескінченно мала.

Таким же чином можна розглянути обернене твердження: якщо $x_n \to 0$ (але $x_n \neq 0$), то $\dfrac{1}{x_n} \to \infty$.

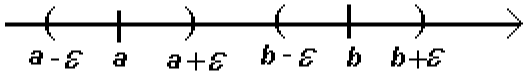
Зауважимо, що це не доведення теореми, а лише, на рівні прикладу, інтуїтивне доведення теореми. Розглянемо ще дві теореми.

Теорема. Границя сталої є сама стала.

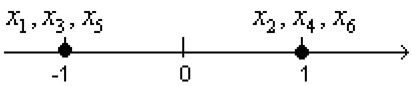
Дійсно, якщо при всіх n буде $x_n = c$, то при всякому $\varepsilon > 0$ буде виконуватись нерівність $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Теорема. Якщо змінна має границю, то ця границя єдина.

Нехай змінна має дві границі, тобто $x_n \to a$ і $x_n \to b$ $(a \neq b)$. Тоді, починаючи з деякого значення n, змінна буде повинна задовольняти зразу дві нерівності: $|x_n - a| < \varepsilon$ і $|x_n - b| < \varepsilon$, але це неможливо, якщо, наприклад, $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$.



Зауваження. Слід пам'ятати, що не всяка змінна має границю. Наприклад $x_n = (-1)^n$ границі не має (див. попередню теорему).



Якщо змінна не має границі, то кажуть, що вона **розбіжна**.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке числова послідовність? Наведіть приклади.
2. Що таке границя послідовності?
3. Наведіть приклад послідовності яка має границю, не має границі.
4. Яка змінна називається нескінченно малою, нескінченно великою? Наведіть приклади.
5. Сформулюйте теорему про зв'язок нескінченно малої і нескінченно великої змінних.
6. Чому дорівнює границя сталої?
7. Як називається послідовність, яка не має границі?

Приклад. Написати чотири перші члени послідовності:

1. $x_n = \dfrac{2n}{n^2+3}$; 2. $x_n = \dfrac{(-1)^n(3n-2)}{n}$.

Розв'язання:

1. $x_1 = \dfrac{2 \cdot 1}{1^2+3} = \dfrac{2}{4}$; $x_2 = \dfrac{4}{7}$; $x_3 = \dfrac{6}{12}$; $x_4 = \dfrac{8}{19}$;

2. $x_1 = -\dfrac{1}{1}$; $x_2 = \dfrac{4}{2}$; $x_3 = -\dfrac{7}{3}$; $x_4 = \dfrac{10}{4}$.

Приклад. Написати формулу загального члена послідовності:

1. $\dfrac{3}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{27}, \dfrac{6}{81}, \ldots$ 2. $-1, 2, -6, 24, \ldots$

Розв'язання: 1. Помітимо, що $3=3,\quad 9=3^2,\quad 27=3^3,\ldots$, тоді $x_n=\dfrac{n+2}{3^n}$.

2. За означенням $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n$. Тому $1!=1$; $2!=1\cdot 2=2$; $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$; $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$; $x_n=(-1)^n\cdot n!$

Приклад. Показати, що послідовність $x_n=\dfrac{2n}{n+1}$ має границю, яка дорівнює 2.

Розв'язання. За означенням границі послідовності для будь-якого $\varepsilon>0$ існує такий номер N, починаючи з якого виконується нерівність

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon. \qquad (2)$$

Спростимо нерівність

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{-2}{n+1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{2}{n+1}<\varepsilon.$$

Розв'яжемо одержану нерівність відносно n:

$$\frac{n+1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n+1>\frac{2}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}-1.$$

Якщо, наприклад, $\varepsilon=\dfrac{1}{10}$, то починаючи з номера $N=19$ $\left(n>\dfrac{2}{\frac{1}{10}}-1\Rightarrow n>20-1\Rightarrow n>19\right)$, буде виконуватись нерівність (2). Якщо $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$, то починаючи з номера $N=199$ $\left(n>\dfrac{2}{\frac{1}{100}}-1\Rightarrow n>200-1\Rightarrow n>199\right)$ буде виконуватись нерівність (2). Таким чином, яке б ε ми не вибрали, завжди знайдеться номер N, починаючи з якого буде виконуватись нерівність (2). Тоді у відповідності з означенням границі послідовності випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Приклад 1. Написати чотири перших члена послідовності:

1. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{2n^2-1}$; 2. $x_n=\dfrac{(3n-1)!}{2^n}$.

Приклад 2. Написати формулу загального члена послідовності:

1. $\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{4},\dfrac{9}{6},\dfrac{16}{8},\dfrac{25}{10}\ldots$; 2. $-2, 2, -2, 2,\ldots$.

Приклад 3. Показати, що послідовність $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ має границю, яка дорівнює 1.

Приклад 4. Які з перелічених послідовностей є нескінченно великі, або нескінченно малі:

1. $x_n = \dfrac{1}{100000000}$; 2. $x_n = (-1)^n \cdot n^2$; 3. $x_n = \dfrac{1}{n+1}$;

4. $x_n = 3^{-n}$; 5. $x_n = n \cdot \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Написати чотири перші члени послідовності:

1. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{5n-4}$; 2. $x_n = \dfrac{4^n}{(n+3)!}$.

Приклад 2. Написати формулу загального члена послідовності:

1. $\dfrac{5}{1}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{8}, \dfrac{11}{16}, \ldots$ 2. $-1, 2, -3, 4, \ldots$

Приклад 3. Показати, що послідовність $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ має границю, яка дорівнює $\dfrac{1}{2}$.

Приклад 4. Які з перелічених послідовностей є нескінченно великі або нескінченно малі:

1. $x_n = \dfrac{1}{3n^2+1}$; 2. $x_n = 1000000000$; 3. $x_n = 1-(-1)^n$;

2. $x_n = 2^n$; 5. $x_n = n^2 \cdot \cos\dfrac{\pi n}{2}$.

8. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Ця тема є однією з найважливіших в математичному аналізі. Розглянемо поняття границі функції і питання, які пов'язані з цим поняттям. У попередньому параграфі розібране поняття границі послідовності. А послідовність – це функція так званого цілочисленого аргументу. Між поняттям границі послідовності і границі функції багато спільного, тому вивчати цю тему почнемо за допомогою послідовностей.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Візьмемо деяке значення $x = x_0$ і розглянемо послідовність $\{x_n\}$, яка задовольняє наступні вимоги:

1. Всі числа $x_n < x_0$ і належать області визначення $y = f(x)$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Підставимо тепер числа x_n в функцію $y = f(x)$ і одержимо послідовність:

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots,\ y_n = f(x_n), \ldots$$

Послідовність $\{y_n\}$ – це послідовність значень функції $y = f(x)$. Припустимо тепер, що для усіх послідовностей $\{x_n\}$, які задовольняють указані вимоги, відповідні послідовності $\{y_n\}$ збігаються і мають одну і ту ж границю A.

Тоді число A називають границею функції $y = f(x)$ у точці x_0 зліва і позначають таким чином: $A = \lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = f(x_0 - 0)$.

Зміст цього означення такий: якщо брати значення x менші, ніж x_0, і наближати x до x_0 ($x \to x_0$), то значення функції $y = f(x)$ будуть наближатись до числа A (рис. 1).

Розглянемо тепер послідовності $\{x_n\}$, які задовольняють вимоги:

1. $x_n > x_0$. 2. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Припустімо, що послідовності $\{y_n\}$ збігаються і мають одну і ту ж границю, яка дорівнює числу A (рис. 2).

Тоді число A називають границею функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ справа і позначають таким чином: $A = \lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = f(x_0 + 0)$.

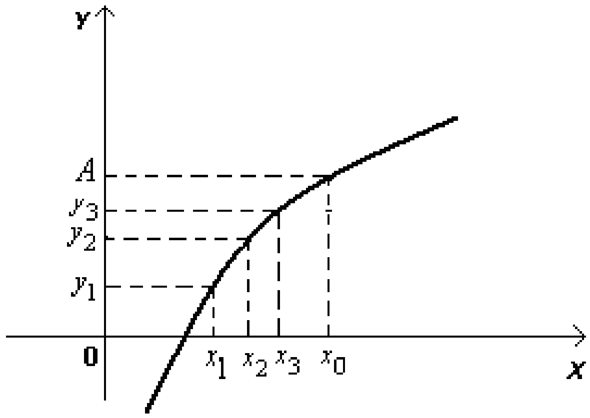


Рис. 1

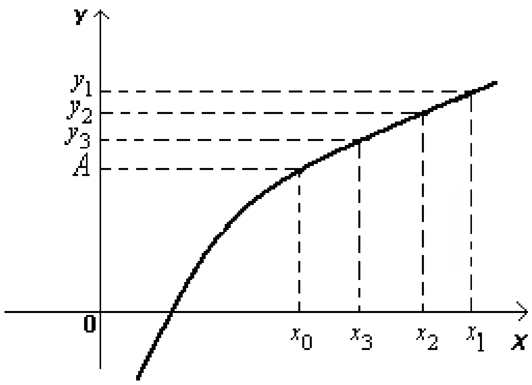


Рис. 2

Припустимо тепер, що у деякої функції у точці $x = x_0$ існує і границя справа і границя зліва і вони збігаються: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$. У цьому випадку кажуть, що функція $y = f(x)$ має у точці $x = x_0$ границю, яка дорівнює A і позначають це так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Існування границі у точці $x = x_0$ означає, що, коли числа x наближаються до числа x_0, не має значення як – з боку більших значень, або з боку менших значень – то значення функції $y = f(x)$ при цьому наближаються до числа A.

А тепер сформулюємо перше означення границі функції (по Гейне).

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 окрім, може, самої точки x_0.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо для **усякої** послідовності $\{x_n\}$, яка прямує до x_0 ($x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$), послідовність відповідних значень функції

$y_n = f(x_n)$ збігається до A.

Позначається це так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, або $f(x) \to A$ (коли $x \to x_0$). Це означення називають означенням границі функції «на мові послідовностей».

Ми розібрали поняття границі за допомогою послідовностей x_n і $y_n = f(x_n)$.

Але це поняття можна сформулювати інакше.

Нехай, наприклад, функція $y = f(x)$ має у точці $x = x_0$ границю. Це означає, що у разі достатньо близьких до x_0 значень x числа $y = f(x)$ будуть достатньо близькими до числа A. Якщо зобразити точки A і y на осі ординат, то слова «достатньо близькі» означають, що точки y потрапляють у будь-який достатньо малий інтервал (окіл) вигляду $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, якщо при цьому x достатньо близько наближається до x_0 (рис. 3).

Але той факт, що y потрапляє в інтервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ можна записати за допомогою нерівності $|y - A| < \varepsilon$. Тобто цей факт можна сформулювати таким чином: для значень x достатньо близьких до x_0 виконується нерівність $|y - A| < \varepsilon$.

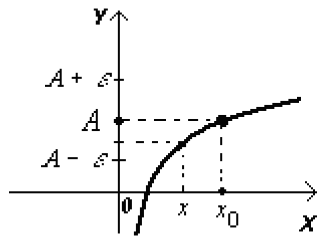


Рис. 3

Обміркуємо тепер, як виразити за допомогою нерівності те, що передають слова: «достатньо близько до x_0».

На рис. 4 видно, що у заданому інтервалі довжиною 2ε для «далеких» від x_0 значень x нерівність $|y - A| < \varepsilon$ не виконується, тобто при заданому $\varepsilon > 0$ числа x потрібно брати (див. рис. 4) між точками M і N. Це означає, що можна виділити деякий інтервал (окіл) $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ на осі OX такий, що коли $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, нерівність $|y - A| < \varepsilon$ виконується.

Тобто слова «достатньо близько до x_0» означають існування інтервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, з якого можна вибрати значення x, такі, що $|y - A| < \varepsilon$. Від чого ж залежить розмір δ? Ясно, що від вибору ε: якщо ε збільшувати, то і δ може збільшитись, а якщо ε зменшувати, то і δ автоматично зменшиться.

Сформулюємо тепер поняття границі за допомогою геометричних образів.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$, якщо для **будь-якого** інтервалу $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ з центром у точці A на осі ординат ($\varepsilon > 0$ довільне стале число) можна указати такий інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ з центром у точці x_0 на осі абсцис, що для **усіх** точок x із δ-інтервалу відповідні точки $y = f(x)$ на осі OY попадуть в ε-інтервал (рис. 5).

Наведемо тепер остаточне формулювання. Для цього нагадаємо, що попадання точки x в інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ можна записати за допомогою нерівності $|x - x_0| < \delta$, а попадання точки y в інтервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ можна записати за допомогою нерівності $|y - A| < \varepsilon$. Нарешті, потрібно мати на увазі, що розмір δ-інтервалу залежить від розмірів ε-інтервалу і що число $\varepsilon > 0$ можна брати яким завгодно – і малим, і великим (хоча брати його великим немає змісту).

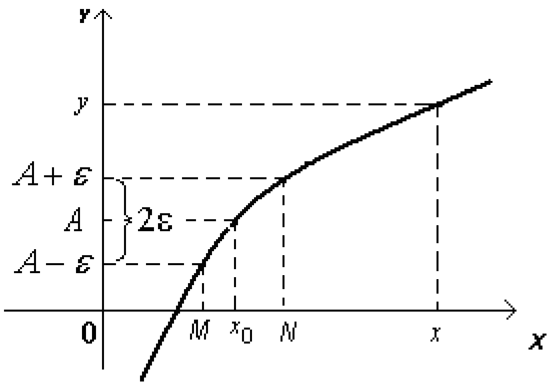


Рис. 4

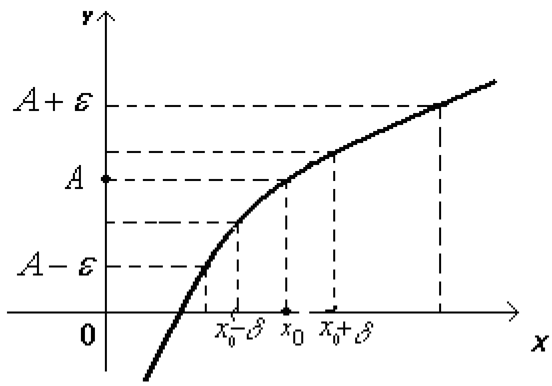


Рис. 5

Означення (по Коші). Число A називається границею функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо функція визначена в деякому околі точки x_0, за виключенням, може бути, самої точки x_0 і для **будь-якого**, як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$, знайдеться таке число $\delta > 0$ (яке залежить від ε), що для **усіх** x таких, що $|x - x_0| < \delta$, $(x \neq x_0)$ буде виконуватись нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ (або рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$).

Таке означення називають означенням границі функції «на мові ε-δ» (епсілон-дельта).

Зауваження 1. Якщо $f(x)$ прямує до границі A_1, а x прямує до числа x_0 так, що x приймає значення тільки менші x_0, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = A_1$ і A_1 називають границею функції $f(x)$ у точці x_0 зліва.

Якщо x прямує до x_0 і приймає значення тільки більші x_0, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = A_2$ і A_2 називають границею функції $f(x)$ у точці x_0 справа.

Можна довести, що коли границя зліва і границя справа існують і рівні, тобто $A_1 = A_2 = A$, то A і буде границею функції $f(x)$ з урахуванням наведеного вище означення. І навпаки, якщо існує границя A функції $f(x)$ у точці x_0, то існують границі функції $f(x)$ у точці x_0 зліва і справа і вони рівні.

Зауваження 2. Визначаючи границі, розглядають значення функції в околі точки x_0, тому для існування границі функції при $x \to x_0$ не обов'язково, щоб функція $f(x)$ була визначена у точці x_0.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2) = 8$ («на мові ε-δ»).

Розв'язання. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Потрібно по ε знайти таке $\delta > 0$, щоб із умови $|x - x_0| < \delta$, тобто із $|x - 2| < \delta$, випливала б нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто $|(3x+2) - 8| < \varepsilon$. Остання нерівність приводиться до виду $|3x - 6| < \varepsilon$, або $3|x - 2| < \varepsilon$, або $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тому, якщо взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, то з нерівності $|x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ буде випливати нерівність $|(3x+2) - 8| < \varepsilon$. Нерівність $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ можна записати таким чином: $-\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}$, або $2 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{3}$. Тобто для любого значення x із інтервалу $\left(2 - \frac{\varepsilon}{3}, 2 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ буде виконуватись нерівність $|(3x+2) - 8| < \varepsilon$. Перевіримо цей факт: нехай, наприклад, $x = 2 + \frac{\varepsilon}{6}$. Підставимо це значення x в останню нерівність

$$|(3x+2) - 8| < \varepsilon \Rightarrow \left|\left[3\left(2 + \frac{\varepsilon}{6}\right) + 2\right] - 8\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|6 + \frac{\varepsilon}{2} + 2 - 8\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\varepsilon}{2}\right| < \varepsilon,$$

тобто нерівність вірна. У відповідності з означенням границі функції це і означає, що $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2) = 8$.

Ми розглянули поняття границі функції у точці: число A є границею функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо з наближенням аргументу x до x_0 $(x \to x_0)$ значення функції y необмежено наближаються до A. Але існують випадки, коли x прямує до нескінченності, а y до A, або $x \to x_0$, а $y \to \infty$ і т. д. Розглянемо деякі з них.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для любого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M > 0$, що для всіх значень $|x| > M$ буде виконуватись нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ (рис. 6).

Означення. Функція $y = f(x)$ прямує до нескінченності при $x \to x_0$, якщо для кожного достатньо великого додатного числа M знайдеться таке δ, що для всіх значень x, які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, буде виконуватись нерівність $|f(x)| > M$ (рис. 7).

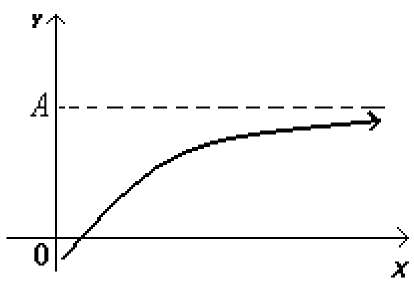


Рис. 6

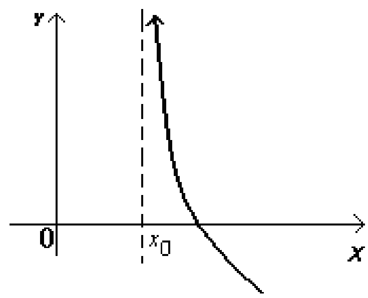


Рис. 7

У цьому випадку функцію називають **нескінченно великою** і записують так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Якщо функція $y = f(x)$ прямує до нескінченності при $x \to x_0$ і при цьому приймає тільки додатні значення, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, а якщо функція приймає тільки від'ємні значення, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Аналогічно можна сформулювати означення границі функції, коли $f(x) \to \infty$ і $x \to \infty$. В окремих випадках може бути $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Зауваження. Зовсім не обов'язково, щоб функція $y = f(x)$ кудись прямувала, коли $x \to x_0$, або $x \to \infty$. Наприклад функція $y = \sin x$, коли $x \to \infty$! (або $x \to -\infty$) не прямує ні до числа ні до нескінченності, тобто границі не має.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке однобічні границі (границі зліва і справа)? Як вони зв'язані з границею функції?
2. Чи потрібно у разі означення границі функції у точці x_0 існування функції в цій точці?
3. Яке число ми вибираємо спочатку: ε чи δ?
4. Дайте геометричне тлумачення границі функції.
5. Сформулюйте означення границі функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (на «мові послідовностей» і на мові «ε-δ»).
6. Сформулюйте означення границі функції, коли $y \to A$, а $x \to \infty$.
7. Що таке нескінченно велика функція? Наведіть геометричну ілюстрацію.

9. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ФУНКЦІЇ І ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Означення. Функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою, коли $x \to x_0$, якщо для любого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для усіх *x*, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, буде виконуватись нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

Цей факт можна записати так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

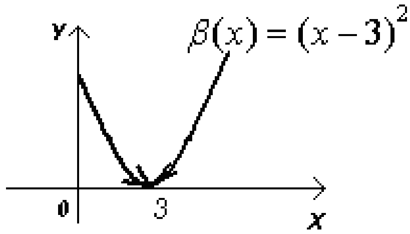
Аналогічне означення можна сформулювати і для $x \to \infty$.

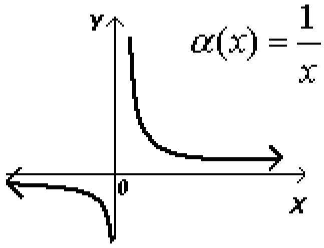
Помітимо, що наведене означення подібне до означення границі функції з тією лише різницею, що $A = 0$.

Наведемо ще одне означення нескінченно малої функції (спрощене): функція $y = f(x)$ називається **нескінченно малою**, якщо її границя дорівнює нулю (коли $x \to x_0$, або $x \to \infty$), тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Нескінченно малі функції будемо позначати таким чином: $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$,…

Помітимо, що, наприклад, функцію $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$ не можна назвати нескінченно малою до тих пір, поки не буде вказано, куди прямує аргумент x. У даному випадку потрібно, щоб $x\to\infty$ або $x\to-\infty$, тоді $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}\to 0$ і буде нескінченно малою функцією. А функція $\beta(x)=(x-3)^2$ буде нескінченно малою тільки тоді, коли $x\to 3$.





З а у в а ж е н н я. Все, що було сказано про невдалий термін «нескінченно малі послідовності» цілком відноситься до терміна «нескінченно малі функції».

Теореми про нескінченно малі функції

1. Для того, щоб число A було границею функції $y=f(x)$ при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$) необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x)-A$ була нескінченно малою функцією. Тобто якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то $f(x)-A=\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція.

Навпаки, якщо $f(x)-A=\alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, тоді за означенням границі функції, починаючи з деякого моменту, буде виконуватись нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Позначимо $f(x)-A=\alpha(x)$, тоді $|\alpha(x)|<\varepsilon$ і за означенням $\alpha(x)$ буде нескінченно малою функцією.

Навпаки: нехай $f(x)-A=\alpha(x)$. Тоді всі значення $\alpha(x)$, починаючи з деякого, будуть задовольняти нерівність $|\alpha(x)|<\varepsilon$, або $|f(x)-A|<\varepsilon$. А з цієї нерівності випливає рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

2. Якщо функція $\alpha(x)$ прямує до нуля при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$) і не перетворюється в нуль, то функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ буде прямувати до нескінченності.

Доведення. Якщо функція $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$), то, починаючи з деякого значення, буде виконуватись нерівність $|\alpha(x)|<\varepsilon$. Тоді

$\frac{1}{|\alpha(x)|} > \frac{1}{\varepsilon}$. Позначимо $\frac{1}{\varepsilon} = M$. Тобто, починаючи з деякого значення, буде виконуватись нерівність $\frac{1}{|\alpha(x)|} > M$, а тоді за означенням функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ буде прямувати до нескінченності.

3. Сума скінченого числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

Доведення. Проведемо доведення для двох функцій.

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі, коли $x \to x_0$ (або $x \to \infty$). Доведемо, що їх сума $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ буде теж нескінченно малою функцією при $x \to x_0$.

Оскільки $\alpha(x)$ нескінченно мала функція, то для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ знайдеться таке число $\delta_1 > 0$, що як тільки $|x - x_0| < \delta_1$ буде виконуватись нерівність $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогічно для $\beta(x)$ знайдеться таке число δ_2, що, як тільки $|x - x_0| < \delta_2$, буде виконуватись нерівність $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Знайдемо $\min\{\delta_1, \delta_2\}$ і позначимо його через δ. Тоді, як тільки $|x - x_0| < \delta$, будуть виконуватись водночас дві нерівності: $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отже,

$$|\gamma(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто $|\gamma(x)| < \varepsilon$ і тому $\gamma(x)$ – нескінченно мала функція.

4. Добуток нескінченно малої функції $\alpha(x)$ на обмежену функцію $f(x)$ при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) є нескінченно мала функція.

Доведення. Якщо $f(x)$ обмежена, коли $x \to x_0$, то знайдеться такий окіл точки x_0, в якому $|f(x)| < M$. Якщо $\alpha(x)$ нескінченно мала функція при $x \to x_0$, то за означенням для всякого $\varepsilon > 0$ знайдеться окіл точки x_0, в якому буде виконуватись нерівність $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тоді

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Отже, $\alpha(x) \cdot f(x)$ – нескінченно мала функція.

Висновок 1. Добуток двох нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

Помітимо, що всяку нескінченно малу функцію можна вважати обмеженою функцією. Тому одну із двох нескінченно малих функцію можна розглядати як обмежену.

Цей висновок вірний і для будь-якого скінченного числа множників.

Висновок 2. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$), а C – стала величина, то $\lim\limits_{x \to x_0} [C \cdot \alpha(x)] = 0$.

Помітимо, що величина C завжди обмежена.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке нескінченно мала функція? Наведіть приклади.
2. В якому випадку функція $y = \dfrac{1}{x-5}$ буде нескінченно малою, а в якому – нескінченно великою?
3. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то як можна представити функцію $y = f(x)$ (за допомогою властивості 1)?
4. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція, а $f(x)$ – обмежена, то чому дорівнює добуток цих функцій?

10. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦЮ ФУНКЦІЇ

Розглянемо декілька функцій, які залежать від одного і того ж аргументу x, який прямує до числа x_0 або до ∞. Будемо проводити доведення для $x \to x_0$, маючи на увазі, що доведення для випадку $x \to \infty$ проводиться аналогічно.

1. Якщо функція $f(x)$ має скінченну границю A при $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то функція буде обмеженою в околі точки $x \to x_0$.

Тобто існує окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, в якому виконується нерівність $|f(x)| < M$.

2. Якщо функція має границю, то вона єдина.

Функція не може водночас прямувати до двох різних границь при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$). Таким чином, існує два варіанти: або функція має границю і вона єдина при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, або функція не має границі при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.

3. Границя суми скінченного числа функцій, дорівнює сумі границь цих функцій.

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) + ... + \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Доведення. Проведемо доведення для двох функцій.

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$, де A_1 і A_2 деякі числа. Тоді на основі теореми 1 із п. 9 можна записати:

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x) \text{ і } f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

де $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ нескінченно малі функції.

Тоді $\quad f_1(x) + f_2(x) = A_1 + \alpha_1(x) + A_2 + \alpha_2(x) = A_1 + A_2 + \alpha_1(x) + \alpha_2(x), \qquad (3)$

де $A_1 + A_2$ – стала величина, позначимо її через A, $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ – сума двох нескінченно малих функцій і тому теж нескінченно мала функція (теорема 3, п. 9), позначимо її через $\alpha(x)$, а суму двох функцій $f_1(x)+f_2(x)$ позначимо через $f(x)$. Тоді рівність (3) запишеться у вигляді $f(x)=A+\alpha(x)$.

Знову скористаємося теоремою 1 із п. 9 і одержимо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Повернемося до початкових позначень:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=A=A_1+A_2=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\sin\frac{x}{2}+\cos x\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin\frac{x}{2}+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$

4. Границя добутку скінченного числа функцій дорівнює добутку границь цих функцій.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A_2$.

Тоді за теоремою 1 п. 9, будемо мати (вже не так докладно, як у теоремі 3):

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=(A_1+\alpha_1(x))\cdot(A_2+\alpha_2(x))=$$

$$=A_1\cdot A_2+A_1\cdot\alpha_2(x)+A_2\cdot\alpha_1(x)+\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)=A+\alpha(x),$$

де $A_1\cdot A_2=A$ – стала величина, а $A_1\cdot\alpha_2(x)+A_2\cdot\alpha_1(x)+\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)$ – сума нескінченно малих функцій, яку ми позначили через $\alpha(x)$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=A=A_1\cdot A_2=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to -2}\left[3^x\cdot x^2\right]=\lim\limits_{x\to -2}3^x\cdot\lim\limits_{x\to -2}x^2=3^{-2}\cdot(-2)^2=\frac{4}{9}.$

Висновок. Сталий множник можна виносити за знак границі.

Помітимо, що границя сталої дорівнює самій сталій: $\lim C=C$. Тоді,

$$\lim_{x\to x_0}\left[C\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to x_0} C\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=C\cdot\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 4}(8\cdot\sqrt{x})=8\cdot\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=16.$

5. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границя знаменника не дорівнює нулю.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)},\quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0.$$

Доведення аналогічне доведенням теорем 3 і 4.

Приклад. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3-4x}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(3-4x)}{\lim\limits_{x\to -1}(x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}3-4\lim\limits_{x\to -1}x}{\lim\limits_{x\to -1}x-\lim\limits_{x\to -1}1}=\frac{3-4\cdot(-1)}{(-1)-1}=-\frac{7}{2}.$

6. Якщо для відповідних значень трьох функцій $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ виконуються нерівності $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x)$, причому $f_1(x)$ і $f_3(x)$ прямують до однієї границі *A*, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_3(x) = A$, то і функція $f_2(x)$ буде теж прямувати до границі *A*, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$.

7. Якщо функція $f(x)$ прямує до границі A і приймає невід'ємні значення ($f(x) \ge 0$), то і A буде невід'ємним числом.

Доведення. Нехай, навпаки, $A < 0$. Тоді, враховуючи, що A – границя функції, **з деякого моменту** повинна виконуватись нерівність $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$ (тобто $\left|f(x) - A\right| \to 0$). А з іншого боку $\left|f(x) - A\right| \ge \left|A\right|$ – тобто модуль різниці $\left|f(x) - A\right|$ більше числа $|A|$. Це значить, що різниця $f(x) - A$ не прямує до A. Це суперечить умові теореми. Отже, $A \ge 0$.

Аналогічно можна довести, що коли $f(x) \to A$ і $f(x) \le 0$, то і $A \le 0$.

8. Якщо між відповідними значеннями функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, які прямують до границь (при $x \to x_0$), виконується нерівність $f_1(x) \le f_2(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$.

Доведення. За умовою теореми $f_1(x) \le f_2(x)$ або $f_2(x) - f_1(x) \ge 0$. Тоді, за теоремою 7

$$\lim_{x \to x_0} [f_2(x)\text{-}f_1(x)] \ge 0 \text{ або } \lim_{x \to x_0} f_2(x)\text{-} \lim_{x \to x_0} f_1(x) \ge 0$$

і, нарешті, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) \ge \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$.

9. Якщо функція $f(x)$ зростаюча і обмежена зверху (тобто $f(x) < M$) при $x \to x_0$, то вона має границю $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, де $A \le M$.

Аналогічне твердження має місце і для спадної, обмеженої знизу функції.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Чому дорівнює границя сталої величини?
2. Чи може функція мати дві границі при $x \to x_0$?
3. Чи може функція не мати границі при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$)? Якщо так, то наведіть приклад.
4. Сформулюйте теорему про границю суми функцій і доведіть її.
5. Якими теоремами з п. 9 ми користуємося у доведенні теорем із п. 10?

11. НЕВИЗНАЧЕНІ ВИРАЗИ І ЇХ РОЗКРИТТЯ

Для спрощення розглядання наступного матеріалу повернемось до числових послідовностей. Нехай $x_n \to a$, $y_n \to b$, де a і b числа або нескінченності (нагадаємо, що n приймає значення 1, 2, 3, 4,…). Розглянемо дріб $\dfrac{x_n}{y_n}$ і різні випадки граничних значень a і b, тобто $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$.

Якщо, наприклад, $a = 0$, а $b = 4$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{0}{4} = 0$. Тобто взагалі якщо чисельник дробу прямує до нуля, а знаменник до деякого числа $(b \neq 0)$, то дріб буде прямувати до нуля.

Розглянемо тепер випадок, коли $a \neq 0$, а $b = 0$, тобто $y_n \to 0$. Помітимо, що y_n не приймає значень, які дорівнюють нулю. Наприклад, нехай $a = 5$. Тоді за великих значень n чисельник x_n дробу $\frac{x_n}{y_n}$ буде майже дорівнювати 5, а знаменник y_n буде достатньо близьким до нуля (але не рівним нулю!).

Ясно, що дріб буде збільшуватись. Тобто якщо чисельник дробу прямує до границі (яка не дорвнює нулю), а знаменник прямує до нуля, то сам дріб буде прямувати до нескінченності: $x_n \to a$ ($a \neq 0$) і $y_n \to 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$.

А тепер перейдемо до випадку, коли і $x_n \to 0$ і $y_n \to 0$. Почнемо з розглядання прикладів:

1. Нехай $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$. Ясно, що $x_n \to 0$ і $y_n \to 0$. **Дріб** $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ теж **прямує до нуля**.

2. Нехай $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, тоді **дріб** $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n} = n$ буде **прямувати до нескінченності**.

3. Нехай $x_n = \frac{4}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{4}{n}}{\frac{1}{n}} = 4$ – **дріб дорівнює сталій величині**.

4. Нехай $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n$ – **дріб не має границі**. Дійсно, коли n – парне $(-1)^n = 1$, а коли n – непарне $(-1)^n = -1$.

Таким чином, ми бачимо, що коли $x_n \to 0$ і $y_n \to 0$, дріб $\frac{x_n}{y_n}$ може прямувати до різних границь або зовсім не мати границі.

Означення. Дріб, у якого чисельник і знаменник є змінні, які прямують до нуля, називається **невизначеністю виду** $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Відшукання границі такого дробу, або встановлення її відсутності, називається **розкриттям** невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Крім невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ існує ще шість видів невизначеностей:

$$\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{0\cdot\infty\}, \{\infty-\infty\}, \left\{1^{\infty}\right\}, \left\{0^{0}\right\}, \left\{\infty^{0}\right\}.$$

Наприклад, невизначеністю $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ називається вираз $\frac{x_n}{y_n}$, де $x_n \to \infty$ і $y_n \to \infty$. А невизначеність виду $\{\infty^0\}$, це вираз $x_n^{y_n}$, де $x_n \to \infty$, а $y_n \to 0$.

Часто студенти до невизначеностей відносять і такі випадки: $\frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \infty\cdot\infty, \frac{c}{\infty}, \frac{\infty}{c}$ і т. д. Однак у перелічених випадках можна зразу записати відповідь. Наприклад, $\frac{0}{\infty}$ означає, що $x_n \to 0$, а $y_n \to \infty$, а дріб $\frac{x_n}{y_n} \to 0$.

Аналогічно:

$$\begin{array}{llll}
\frac{\infty}{0}: & x_n \to \infty, & y_n \to 0, & \frac{x_n}{y_n} \to \infty; \\
\infty\cdot\infty: & x_n \to \infty, & y_n \to \infty, & x_n \cdot y_n \to \infty; \\
\frac{c}{\infty}: & x_n \to c, & y_n \to \infty, & \frac{x_n}{y_n} \to 0; \\
\frac{\infty}{c}: & x_n \to \infty, & y_n \to c, & \frac{x_n}{y_n} \to \infty.
\end{array}$$

Тому потрібно чітко засвоїти, що невизначеностей тільки **сім** і головне – вивчити їх!

Розкриття деяких видів невизначеностей

1. Невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, яка задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-5x+1}{4x^3+7}$**.**

Розв'язання. Підставимо значення границі $x=\infty$ в чисельник і знаменник. Одержимо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Розділимо чисельник і знаменник дробу на x^3. Тоді

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-5x+1}{4x^3+7} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3+3x^2-5x+1}{x^3}}{\frac{4x^3+7}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{7}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{7}{x^3}} = \left\{ \begin{matrix} \text{помітимо, що дроби} \frac{3}{x}, \frac{5}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{7}{x^3} \\ \text{прямують до 0} \end{matrix} \right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Застосований метод має загальний характер.

Рекомендуємо запам'ятати правило.

Правило. Для того, щоб розкрити невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ коли $x \to \infty$, яка задана відношенням двох многочленів, потрібно чисельник і знаменник дробу розділити на x^k, де k – найвищий степінь змінної x, яка входить до прикладу.

Зазначимо, що це правило можна застосовувати і для ірраціональних функцій, аби тільки в прикладі була невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, а $x \to \infty$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^3-1}}{x^2+2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^3-1}}{x^2+2x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{у цьому випадку } k=2, \text{ тому розділимо} \\ \text{чисельник і знаменник на } x^2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4+x^3-1}}{x^2}}{\frac{x^2+2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4+x^3-1}{x^4}}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}}}{1+\frac{2}{x}} = 1.$$

2. Невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, яка задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-9} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-1}{x+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Тобто в прикладах такого типу завжди існує так званий «критичний множник» (у даному випадку це $x-3$), який потрібно вилучити і скоротити.

Правило. Щоб розкрити невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, яка задана відношенням двох многочленів (причому $x \to x_0$), потрібно в чисельнику і знаменнику дробу вилучити «критичний множник» $x - x_0$ і скоротити на нього.

З а у в а ж е н н я. «Критичний множник» $x - x_0$ обов'язково вилучається і в чисельнику і в знаменнику, оскільки значення $x = x_0$ є коренем обох многочленів, а тому ці многочлени за теоремою Безу діляться на $x - x_0$ без залишку.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Тут "критичний множник" } x+1\text{. У чисельнику знай-}\\ \text{демо корені, а в знаменнику згрупуємо доданки.}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x^2(x+2) - (x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+2)\left(x^2 - 1\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+2)(x-1)(x+1)} =$$

$$= 2\lim_{x\to -1} \frac{x - \frac{1}{2}}{(x+2)(x-1)} = 2\cdot \frac{-1 - \frac{1}{2}}{(-1+2)(-1-1)} = \frac{3}{2}.$$

3. Невизначеності вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, в яких є ірраціональність.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 6x} - 4}{x^2 - 2x}$**.**

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 6x} - 4}{x^2 - 2x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

УВАГА!

Метод вилучення «критичного множника» тут не підходить, оскільки для ірраціональних виразів теорема Безу не застосовується. У цьому випадку помножимо чисельник і знаменник на спряжений множник.

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 6x} - 4\right)\left(\sqrt{x^2 + 6x} + 4\right)}{\left(x^2 - 2x\right)\left(\sqrt{x^2 + 6x} + 4\right)} = \left\{\begin{array}{l}\text{У чисельнику отримали різницю}\\ \text{квадратів: } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2 + 6x} + 4\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+8)(x-2)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2 + 6x} + 4\right)} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{Як бачимо, "критичний множник" таки з'явився, але після того, як ми звільнились}\\ \text{від ірраціональності в чисельнику. Помітимо, що ірраціональність у знаменнику}\\ \text{нам не заважає, тобто вона не прямує до нуля, коли } x \to 2.\end{array}\right\} =$$

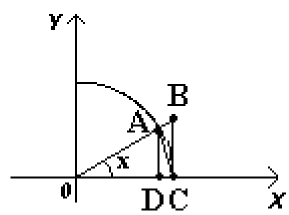
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+8}{x\left(\sqrt{x^2 + 6x} + 4\right)} = \frac{10}{2\cdot 8} = \frac{5}{8}.$$

Правило. Щоб розкрити невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, в якій є ірраціональний вираз, потрібно відповідним образом звільнитись від ірраціональності.

Зауваження. Ми розглянули три методи розкриття невизначеностей. Слід запам'ятати, що метод ділення чисельника і знаменника на x^k застосовується для розкриття невизначеностей $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, коли $x \to \infty$. Метод вилучення «критичного множника» застосовується для розкриття невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, коли $x \to x_0$, причому ні в чисельнику, ні в знаменнику немає ірраціонального виразу, який перетворюється в нуль при $x = x_0$. Якщо ж така ірраціональність є і ми маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, то відповідним образом потрібно звільнитись від ірраціональності.

Ці методи НЕ плутати !

4. Тригонометричні невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Перша чудова границя.



Функція $y = \frac{\sin x}{x}$ невизначена при $x = 0$, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. Знайдемо границю цієї функції при $x \to 0$.

Візьмемо коло радіусом R і позначимо радіанну міру кута AOC через x (нагадаємо, що радіаном, називається центральний кут, який спирається на дугу, яка дорівнює радіусу). Нехай $0 < x < \pi/2$. Проведемо дотичну до кола у точці C. Промінь OA продовжимо до перетину з дотичною. Із рисунка видно, що площа ΔBOC більша, ніж площа сектора AOC. А ця площа, в свою чергу, більша, ніж площа ΔAOC. Знайдемо ці площі:

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \sin x = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x;$$

$$S_{\text{сект.}\, AOC} = \frac{1}{2} \cdot OC^2 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot x;$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

Порівнюючи площі трикутників і сектора, маємо нерівності:

$S_{\Delta AOC} < S_{\text{сект.}AOC} < S_{\Delta BOC}$ або $\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg} x$ або $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Розділимо одержані нерівності на sin$x$ $\left(\sin x > 0\right.$, оскільки за умовою $\left. 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ і дістанемо:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ або } 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x .$$

Оскільки $\lim 1 = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ то за теоремою 6, п. 10 будемо мати:

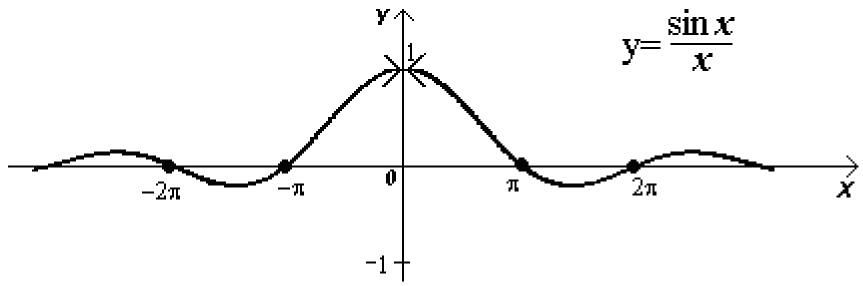
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{4}$$

Зауваження. Дріб $\frac{\sin x}{x}$ є парна функція.

Дійсно, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$

Тому той же результат має місце і при $x < 0$. Рівність (4) називається першою чудовою границею.

Слід пам'ятати, що рівність (4) вірна **тільки при** $x \to 0$. Якщо, наприклад, $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Дійсно, $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ не існує, але $\sin x$ функція обмежена, тобто $|\sin x| < 1$, знаменник дробу прямує до нескінченності, і тому весь дріб прямує до нуля.



Ясно, що $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. І, взагалі $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1$, де α – деяке число.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\cos 5x \cdot x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 5x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{\cos 5x} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}_{=1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{5}{\cos 5x} = 5 \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 5x} = 5.$$

5. Невизначеності виду $\{1^{\infty}\}$. Друга чудова границя. Число ***e***.

Відомо, що коли функція зростає і обмежена зверху, то вона має границю (див. т. 9, п. 10).

Застосуємо цю теорему для числової послідовності $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Легко перевірити, що $x_1 = 2$; $x_2 = 2{,}25$; $x_3 = 2{,}37$; $x_4 = 2{,}441$; $x_5 = 2{,}488$.

Ми бачимо, що $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < ...$

Крім цього, можна довести, що для всіх n, $x_n < 3$.

Таким чином, послідовність зростає і обмежена зверху і тому вона має скінченну границю, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Означення. Границею змінної $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ називається число ***e***, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (5)$$

Число ***e*** – ірраціональне, воно дорівнює 2,7182818… Рекомендуємо запамятати: $\boxed{e \approx 2,72}$.

Якщо в формулі (5) зробити заміну $\frac{1}{n} = z$ (тоді $z \to 0$), то вона буде мати вигляд $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$. Можна довести, що ці формули мають місце і для змінної x.

Тобто можна записати

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left\{1^\infty\right\} = e \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left\{1^\infty\right\} = e. \qquad (6)$$

Формули (6) називають другою чудовою границею.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3} = \{1^\infty\} = \left\{\begin{matrix}\text{Скористаємося формулою} \\ a^{m+n} = a^m \cdot a^n\end{matrix}\right\} =$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^3\right] = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{=e} \cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}_{=1} = e.$$

У подальшому, крім формул (6), можна використовувати і такі формули:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}} = e, \quad \lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{mx}} = e.$$

Тут m – деяке число, або вираз. Головне, щоб у разі підстановки границі мала місце невизначеність $\{1^\infty\}$.

12. НАТУРАЛЬНІ ЛОГАРИФМИ

Означення. Логарифм деякого числа *N*, який обчислюється по основі **e**, називається натуральним логарифмом цього числа і позначається через $\ln N$, тобто $\log_e N = \ln N$.

У багатьох випадках зручніше використовувати натуральні логарифми, ніж, наприклад, знайомі з середньої школи десяткові логарифми. Знайдемо формулу, яка зв'язує натуральні і десяткові логарифми.

За означенням $N = e^{\ln N}$. Прологарифмуємо цю рівність по основі 10.

$$\lg N = \lg e^{\ln N} \quad \text{або} \quad \lg N = \ln N \cdot \lg e.$$

У таблицях десяткових логарифмів знайдемо $\lg e \approx 0,43429\ldots$ Тому

$$\lg N \approx 0,434 \cdot \ln N = M \cdot \ln N. \tag{7}$$

Число $\boxed{M \approx 0,434}$ називається **модулем переходу** від натуральних логарифмів до десяткових.

Ця формула дозволяє находити десятковий логарифм числа N, якщо відомий натуральний логарифм N. Рівність (7) можна записати в іншому вигляді:

$$\ln N = \frac{1}{M} \cdot \lg N \cong \frac{\lg N}{0,434} = \frac{1}{0,434} \cdot \lg N \approx 2,302 \lg N.$$

Тобто це формула переходу від десяткових до натуральних логарифмів.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$?
2. Перелічіть всі невизначеності.
3. Якщо $x_n \to 0$, а $y_n \to \infty$, куди прямує дріб $\frac{x_n}{y_n}$?
4. Якщо $x_n \to c$, а $y_n \to 0$, куди прямує дріб $\frac{x_n}{y_n}$?
5. Сформулюйте правило розкриття невизначеності $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.
6. Що таке «критичний множник»?
7. Запишіть першу чудову границю. Яку невизначеність розкриває ця формула?
8. Яку невизначеність розкриває друга чудова границя? Запишіть її формули.
9. Що таке натуральний логарифм?
10. Чому дорівнює модуль переходу від натуральних логарифмів до десяткових логарифмів?

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 5x + 2}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 5x + 2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Обчислення границі зводиться} \\ \text{до підстановки граничного} \\ \text{значення аргументу} \end{array} \right\} =$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{2 \cdot (-2)^2 - 1}{(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2} = \frac{7}{16}$$

Але якщо у разі підстановки граничного значення аргументу ми одержує невизначеність, то в кожному випадку відшукання границі необхідне застосування спеціальних методів розв’язування.

Випадок 1. Розкриття невизначеності виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Приклад. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^2+1}{4x^4-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x\cdot\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-2x+7}}$; 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2}{4+7+10+...+(3n+1)}$.

Розв’язання. 1. Маємо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Розділимо чисельник і знаменник на x^5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^2+1}{4x^4-x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^5+2x^2+1}{x^5}}{\frac{4x^4-x}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{\frac{4}{x}-\frac{1}{x^4}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Дроби }\ \frac{2}{x^3},\frac{1}{x^5},\frac{4}{x},\frac{1}{x^4}\ \text{ прямують до нуля. Тоді чисельник прямує}\\ \text{до 3, знаменник до нуля, а весь дріб} - \text{до нескінченності.}\end{array}\right\}=\infty.$$

2. Цей приклад розв’яжемо тим же методом. Розділимо чисельник і знаменник на $x^{3/2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x\cdot\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-2x+7}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^{3/2}+3}{x^{3/2}}}{\frac{\sqrt{x^3-2x+7}}{x^{3/2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^{3/2}}}{\sqrt{\frac{x^3-2x+7}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^{3/2}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}}=2$$

3. У цьому прикладі знаменник дробу є сумою n членів арифметичної прогресії:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2}{4+7+10+...+(3n+1)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left\{S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{4+(3n+1)}{2}n=\frac{3n+5}{2}n\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+9}{\frac{(3n+5)\cdot n}{2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+9}{3n^2+5n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}}{3+\frac{5}{n}}=\frac{2}{3}.$$

Випадок 2. Розкриття невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, яка задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$; 2. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+4x+3}{x^4-7x^2-8}$; 3. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$.

Розв'язання.

1. $$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{За правилом у чисельнику і в знаменнику потрібно}\\ \text{вилучити "критичний множник" } x+1\text{. Для цього}\\ \text{розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники}\\ \text{за формулою}\quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\\ \text{де } x_1,x_2 \text{ - корені тричлена:} 3x^2+4x+1=3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\\ \qquad\qquad\qquad x^2+3x+2=(x+1)(x+2)\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{3(\cancel{x+1})(x+\frac{1}{3})}{(\cancel{x+1})(x+2)}=\frac{3\cdot(-1+\frac{1}{3})}{(-1+2)}=-2.$$

2. $$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+4x+3}{x^4-7x^2-18}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Тим же способом вилучаємо "критичний множник"}\\ x+3\text{. У знаменнику розв'яжемо біквадратне рівняння:}\\ x^2=t;\quad t^2-7t-18=0;\quad t_1=9, t_2=-2.\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x+1)}{(x^2-9)(x^2+2)}=\lim_{x\to-3}\frac{(\cancel{x+3})(x+1)}{(\cancel{x+3})(x-3)(x^2+2)}=\frac{-2}{(-6)\cdot 11}=\frac{2}{66}=\frac{1}{33}.$$

3. $$\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Тут "критичний множник" } x-2,\text{ оскільки } x=2\\ \text{один із коренів чисельника, тоді можна}\\ \text{поділити чисельник на множник } x-2:\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}x^3-3x-2 & |\,\underline{x-2}\\ -\underline{x^3-2x^2} & \;x^2+2x+1\\ \qquad 2x^2-3x-2 & \\ \quad -\underline{2x^2-4x} & \\ \qquad\qquad x-2 & \\ \qquad\; -\underline{x-2} & \\ \qquad\qquad\; 0. & \end{array}\right\}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2}=9.$$

Випадок 3. Розкриття невизначеності вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, в якій є ірраціональний вираз.

Нагадуємо, що метод вилучення «критичного множника» тут застосовувати **не можна!**

Приклад. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$.

Розв'язання.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Позбавляємося ірраціональності в знаменнику}\\ \text{шляхом множення знаменнника і чисельника}\\ \text{на спряжений множник}\quad \sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\left\{\begin{array}{c}\text{У знаменнику застосуємо формулу}\\ (a-b)(a+b)=a^2-b^2\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{(4+x)-(4-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{2\cancel{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0}\right)=2.$$

2. $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Тут ірраціональність присутня і в чисельнику і в}\\ \text{знаменнику. Тому потрібно помножити чисельник}\\ \text{і знаменник на добуток}\quad \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\overbrace{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}^{x-4}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\underbrace{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}_{(2x+1)-9}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left[(2x+1)-9\right]\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(\cancel{x-4})\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(\cancel{x-4})\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}+3}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{3+3}{2(2+2)}=\frac{3}{4}.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{У чисельнику застосуємо формулу}\\ (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3.\\ \text{Нехай }\sqrt[3]{8-x}\text{-}2=a-b.\text{ Тоді домножимо}\\ \text{чисельник і відповідно знаменник}\\ \text{на }a^2+ab+b^2=\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\\ \text{і одержимо різницю кубів }a^3-b^3=(8-x)-2^3\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{8-x}-2\right)\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}{x\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^3-2^3}{x\cdot\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{8-x-8}{x\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4} = -\frac{1}{2^2+2\cdot 2+4} = -\frac{1}{12}.$$

Випадок 4. Тригонометричні невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Перша чудова границя.

Нагадаємо формули:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = 1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = 1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = 1.$$

Приклад. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 5x-\cos 3x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

Розв'язання.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Скористаємося формулою}\\ 1-\cos 2x = 2\sin^2 x.\end{array}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0} 2\cdot\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1}\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1} = 8.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Щоб у заданому виразі виділити першу}\\ \text{чудову границю поділимо чисельник і}\\ \text{знаменник на } x \text{ і будемо мати}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{7\cdot\overbrace{\frac{\sin 7x}{7x}}^{=1}}{5\cdot\underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{=1}} = \frac{7}{5}.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 5x-\cos 3x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{В знаменнику скористаємося формулою}\\ \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2\sin\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2\sin 4x\cdot\sin x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 4x}\cdot\frac{x}{\sin x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{4\cdot\sin 4x} = -\frac{1}{8}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Щоб застосувати першу чудову границю, зробимо заміну}\\ \text{змінної: } x-1=t, \text{тоді при } x\to 1 \text{ змінна } t \text{ буде прямувати}\\ \text{до нуля: } x=t+1, 1-x^2=(1-x)(1+x)=(-t)(1+t+1)=\\ =(-t)(t+2).\end{array}\right\}=$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{\sin\left[\pi+\pi t\right]}=\left\{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\right\}=-\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{-\sin\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi}\cdot\underbrace{\frac{\pi\cdot t}{\sin\pi t}}_{=1}\cdot(t+2)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0}(t+2)=\frac{2}{\pi}.$$

В и п а д о к 5. Розкриття невизначеності виду $\{1^\infty\}$. Друга чудова границя. Нагадаємо формули:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\ \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}=e;\quad \lim_{x\to 0}\left(1+mx\right)^{\frac{1}{mx}}=e.}$$

Приклад. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x+1}\right)^x$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^{3x^2-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{x\cdot\left[\ln(5x+2)-\ln 5x\right]\right\}$; 5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(9-8x\right)^{\frac{3}{x-1}}$.

Розв'язання. 1. Переконаємося спочатку, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x+1}\right)=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$. Тобто, має місце невизначеність $\left\{1^\infty\right\}$. Перетворимо вираз так, щоб скористатися другою чудовою границею.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+1}\right)^x=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-3}\cdot\frac{-3}{2x+1}\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3x}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x}{2x+1}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2+\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}=\frac{1}{e\cdot\sqrt{e}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\left\{1^\infty\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{5}{x}}=1,$ тобто основа прямує до одиниці.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^{3x^2-1}=\left\{1^\infty\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Далі можна виділити цілу частину дробу, а можна}\\ \text{додати до основи і відняти від неї одиницю.}\end{array}\right\}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-5}-1^{\backslash x-5}\right)^{3x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3-x+5}{x-5}\right)^{3x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-5}\right)^{3x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-5}\right)^{\frac{x-5}{8}\cdot\frac{8}{x-5}\cdot\left(3x^2-1\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{8(3x^2-1)}{x-5}} = e^{8\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x-5}} = e^{8\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}} =$$

$$= e^{8\cdot\infty} = e^{\infty} = \infty.$$

4. Спочатку спростимо вираз:

$$\ln(5x+2)-\ln 5x = \left\{\ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y}\right\} = \ln\frac{5x+2}{5x} = \ln\left(1+\frac{2}{5x}\right).$$

Тепер перейдемо до розв'язування прикладу:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{x\cdot\left[\ln(5x+2)-\ln 5x\right]\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{У квадратних дужках маємо}\\ \text{невизначеність виду}\{\infty-\infty\}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{5x}\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Використаємо властивість}\\ a\cdot\ln x = \ln x^a\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{5x}\right)^x = \ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{5x}\right)^x = \{1^\infty\} =$$

$$= \ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{5x}\right)^{\frac{5x}{2}\cdot\frac{2}{5x}\cdot x} = \ln\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2x}{5x}} = \ln e^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}\ln e = \frac{2}{5}, \text{ оскільки } \ln e = 1.$$

5. Знайдемо границі основи функції і показника функції:

$$\lim_{x\to 1}\left(9-8x\right) = 1, \quad \lim_{x\to 1}\frac{3}{x-1} = \infty.$$

Маємо невизначеність $\{1^\infty\}$. Але для того, щоб скористатись другою чудовою границею, потрібно, щоб $x\to\infty$ або $x\to 0$. Тому зробимо заміну: $x-1=t$.

$$\lim_{x\to 1}\left(9-8x\right)^{\frac{3}{x-1}} = \{1^\infty\} = \left\{\begin{matrix}x-1=t, \text{ звідси } \quad x=t+1.\\ \text{Якщо } x\to 1, \text{ то } t \text{ буде}\\ \text{прямувати до нуля.}\end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0}\left[9-8(t+1)\right]^{\frac{3}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0}(9-8t-8)^{\frac{3}{t}} = \lim_{t\to 0}(1-8t)^{\frac{3}{t}} = \left\{1^\infty\right\} = \lim_{t\to 0}\left(1+(-8t)\right)^{\frac{1}{-8t}\cdot(-8t)\cdot\frac{3}{t}} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{-24\cancel{t}}{\cancel{t}}} =$$

$$= e^{-24} = \frac{1}{e^{24}}.$$

В и п а д о к 6. Розкриття невизначеності виду $\left\{\infty-\infty\right\}$.

Приклад. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{12}{8+x^3}\right]$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Розв'язання. 1. Різницю приведемо до спільного знаменника.

$$\lim_{x\to -2}\left[\frac{1}{2+x}-\frac{12}{8+x^3}\right]=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to -2}\left[{}^{4-2x+x^2\,/}\;\frac{1}{2+x}-\frac{12}{8+x^3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{4-2x+x^2-12}{(2+x)(4-2x+x^2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{(2+x)(4-2x+x^2)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Вилучимо "критичний}\\ \text{множник"}\quad x+2\end{array}\right\}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\,(x-4)}{\cancel{(2+x)}\,(4-2x+x^2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{4-2x+x^2}=$$

$$=\frac{-2-4}{4+4+4}=-\frac{1}{2}.$$

$$2.\ \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\{\infty-\infty\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Будемо розглядати задану функцію як дріб із}\\ \text{знаменником, який дорівнює одиниці.}\\ \text{Позбавимося від ірраціональності}\\ \text{в чисельнику шляхом множення чисельника і}\\ \text{знаменника на спряжений множник}\quad \sqrt{x^2+1}+x.\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Невизначеності немає;}\\ \text{знаменник прямує до нескінченності.}\end{array}\right\}=0.$$

З а у в а ж е н н я. Розкриття останніх трьох невизначеностей $\{0\cdot\infty\}, \{0^0\}, \{\infty^0\}$ буде розглянуто в іншому розділі математики.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Приклад 1. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-5x^2+9x-1}{16x^3+2x+5}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{2x^2-5}$; 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{(n+2)^2}$.

Приклад 2. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+4x+3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{6x^2-5x+1}{8x^3-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2+x}$.

Приклад 3. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{8+x}-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{x^2-3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

Приклад 4. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}3x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 9x}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\sin x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

Приклад 5. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{4x+5}\right)^{x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3+x}$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)\cdot\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$; 4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x-3\right)^{\frac{3x}{x-2}}$.

Приклад 6. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2-5}-x\right]$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+x}{x^3-4x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^3+5x^2-1}}{3x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-8}{\sqrt[4]{2x^6+x^4+3}}$.

Відповіді: 1. ∞; 2. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$; 3. 0.

Приклад 2. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2+3x-10}$; 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-x^2-1}{x^4-1}$.

Відповіді: 1. 1; 2. $-\dfrac{2}{5}$; 3. $\dfrac{3}{2}$.

Приклад 3. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Відповіді: 1. $\dfrac{1}{2}$; 2. 7; 3. $\dfrac{3\cdot\sqrt{2}}{4}$.

Приклад 4. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\text{tg}\,9x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\text{tg}\,2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}\,x-\sin x}{x^2}$.

Відповіді: 1. $\dfrac{1}{9}$; 2. 2; 3. $\dfrac{1}{2}$; 4. 0.

Приклад 5. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x+2}\right)^{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-3}{3x+2}\right)^{x-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}\cdot\left[\ln(x-1)-\ln x\right]$; 4. $\lim\limits_{x\to3}\left(7-2x\right)^{\frac{2}{x-3}}$.

Відповіді: 1. e^{5}; 2. $e^{-\frac{5}{3}}$; 3. $-\frac{1}{2}$; 4. e^{-4}.

Приклад 6. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{3}{1-x^{3}}-\dfrac{1}{1-x}\right]$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^{2}+5}-x\right)$.

Відповіді: 1. 1; 2. $\frac{5}{2}$.

13. ПОРІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, які є функціями одного і того ж аргументу.

Означення 1. Якщо відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ прямує до скінченої границі $A\neq0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку**.

Приклад. Нехай $\alpha(x)=\sin 3x$, $\beta(x)=x$ і $x\to0$. Знайдемо границю відношення:

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to0}3\cdot\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{=1}=3,\ A\neq0.$$

Тобто $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі одного порядку.

Помітимо, що при $x\to0$ нескінченно малі x, $\sin mx$, $\operatorname{tg} nx$ є нескінченно малими одного порядку.

Означення 2. Якщо відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ прямує до нуля, тобто якщо $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ $\left(\text{а } \lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty\right)$, то $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою вищого порядку** відносно $\beta(x)$, а $\beta(x)$ – нескінченно малою нижчого порядку відносно $\alpha(x)$.

Приклад. Нехай $\alpha(x)=(x-4)^{3}$, $\beta(x)=x-4$, $x\to4$. Знайдемо границю відношення: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)^{3}}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x-4)^{2}=0$.

Тобто $\alpha(x)$ – нескінченно мала вищого порядку відносно $\beta(x)$.

Означення 3. Якщо відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ прямує до одиниці, тобто якщо $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то нескінченно малі називають **еквівалентними** і пишуть $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Приклад. Нехай $\alpha(x)=\sin x$, $\beta(x)=x$, $x\to 0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, тому $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Наведемо найбільш розповсюджені еквівалентні нескінченно малі. Якщо $x\to 0$, то $x\sim\sin x\sim \operatorname{tg} x\sim \arcsin x\sim \operatorname{arctg} x\sim \ln(1+x)\sim e^x-1$.

Зауваження. Якщо відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не має границі, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ не можна порівнювати.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Наведіть означення нескінченно малих одного порядку.
2. В якому випадку одна нескінченно мала буде вищого порядку ніж інша?
3. Які нескінченно малі називають еквівалентними? Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих функцій.

Приклад. Знайти границі за допомогою еквівалентних нескінченно малих:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(e^x-1)}$; 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-3x}$.

Розв'язання. 1. Скористаємося еквівалентністю нескінченно малих величин: $\sin x\sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}.$$

2. Аналогічно $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}=2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2\sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{x^2}{2}$; $e^x-1\sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(e^x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot x}=\frac{1}{2}.$$

3. $x\sim\operatorname{arctg} x$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Приклад 1. Знайти границі за допомогою еквівалентних нескінченно малих:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}^2 4x}{x\cdot\ln(1+x)}$.

Приклад 2. Довести еквівалентність нескінченно малих функцій при $x\to 0$:

1. $e^{3x}-e^{4x}\sim -x$; 2. $\arcsin\dfrac{x}{3}\sim\dfrac{\mathrm{tg}\,2x}{6}$; 3. $\mathrm{arctg}\dfrac{7}{4}x\sim -\dfrac{7}{8}(e^{-2x}-1)$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Знайти границі за допомогою еквівалентних нескінченно малих:

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\mathrm{tg}\,7x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(1+x)}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\mathrm{arctg}\frac{x}{5}}$.

Відповіді: 1. $\frac{3}{7}$; 2. 2; 3. 5.

Приклад 2. Довести еквівалентність нескінченно малих функцій при $x\to 0$.

1. $e^{mx}-1\sim mx$; 2. $\mathrm{tg}\,x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$; 3. $\ln\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М: Наука, 1980. – Т. 1.

2. Овчинников П. П. Вища математика / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К.: Техніка, 2000. – Ч. 1.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М: Наука. – Т. 1.

4. Смирнов В. М. Курс высшей математики. – М: Просвещение, 1974. – Т. 1.

5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука, 1985.

6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980. – Ч. 1.

7. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Н. В. Міхєєва, В. О. Петренко

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 3
Частина 1

Редактор *Т. В. Мацкевич*
Комп'ютерна верстка *Т. В. Шевченко*

Підписано до друку 25.05.2007. Формат 60x84 1/16. Папір для множних апаратів. Ризограф. Ум. друк. арк. 3,46. Обл.-вид. арк. 3,6. Тираж 300 прим. Зам. № 884. Вид. № 76.

Видавництво Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна
ДК № 1315 від 31.03.2003
Адреса видавництва та дільниці оперативної поліграфії:
49010, Дніпропетровськ, вул. Лазаряна, 2
www.diitrvv.dp.ua, admin@diitrvv.dp.ua