МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ’ЯЗКУ УКРАЇНИ

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Кафедра «Вища математика»

Модульне навчання

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 1

Укладачі: Т. М. Бусарова
В. В. Кравець
Н. В. Міхєєва
В. О. Петренко

Для студентів першого курсу усіх спеціальностей

Дніпропетровськ
2007

УДК 512.8

Укладачі:
Т. М. Бусарова, В. В. Кравець, Н. В. Міхєєва, В. О. Петренко

Рецензенти:
канд. фіз.-мат. наук, доц. *В. Л. Велікін (ДНУ)*
канд. фіз.-мат. наук, доц. *Т. Ф. Михайлова (ДІІТ)*

Модульне навчання. Лінійна алгебра: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 1 / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна; Уклад.: Т. М. Бусарова, В. В. Кравець, Н. В. Міхєєва, В. О. Петренко; За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. В. В. Кравця. – Д., 2007. – 68 с.

Методичні рекомендації призначаються для студентів першого курсу всіх спеціальностей. Містять основний теоретичний матеріал розділу, велику кількість розв'язаних прикладів, тридцять варіантів індивідуальних домашніх завдань, а також приклади тестових завдань з наведеними відповідями.
Бібліогр.: 5 наймен.

ВСТУП

Запропонований навчальний посібник при застосуванні модульної системи навчання є модулем 3, тобто одним із системи модулів, в яких закладені основні розділи з дисципліни «Вища математика». Ці розділи (модулі) об'єднані за змістом із врахуванням відведених кредитів на вивчення усього курсу з вищої математики.

З метою контролю вивчення та опанування основ вищої математики кожен модуль є заліковим з обов'язковим оцінюванням якості засвоєння матеріалу студентами згідно прийнятої в університеті бальної системи.

Засобами діагностики успішності навчання є комплекти індивідуальних завдань та комплекти тестових завдань для складання контрольних заходів (залік, модульний контроль, екзамен).

Пропонується наступний розподіл основних розділів при вивчені курсу вищої математики по семестрам:

1 курс

МК 1 (I семестр, 1-а половина). **Векторна і лінійна алгебра**
МК 2 (I семестр, 2-а половина). **Аналітична геометрія**

Дії над векторами, матриці, визначники. Рівняння ліній, площин. Зображення ліній на площині та у просторі.

МК 3 (II семестр, 1-а половина). **Функції, границя, неперервність функцій**
МК 4 (II семестр, 2-а половина). **Диференціальне числення**

Основні поняття, обчислення граничних значень, точки розриву функції. Схематичне зображення графіків функцій (однієї змінної). Похідна та її застосування до практичних задач.

2 курс

МК 5 (III семестр, 1-а половина). **Невизначений інтеграл**
МК 6 (III семестр, 2-а половина). **Визначений інтеграл**

Первісна функції. Основні методи знаходження. Визначений інтеграл. Обчислення і застосування до задач геометрії, фізики, механіки.

МК 7 (IV семестр, 1-а половина). **Звичайні диференціальні рівняння**
МК 8 (IV семестр, 2-а половина). **Ряди**

Основні типи рівнянь, які допускають розв'язок у квадратурах.

Числові і степеневі ряди.

1. ПОНЯТТЯ МАТРИЦІ. ВИДИ МАТРИЦЬ

Означення 1.1. Матрицею A розміру $m\times n$ називають прямокутну **таблицю** чисел, (або функцій) із m рядків і n стовпців.

Матриця A має вигляд: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Числа $a_{11},\ a_{12},\dots,a_{m2},\dots,a_{mn}$ називають **елементами** матриці.

Розміщення кожного елемента a_{ij} в матриці визначається двома індексами: i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких міститься цей елемент. Наприклад, елемент a_{34} міститься на перетині третього рядка і четвертого стовпця. Іноді замість круглих дужок матриця позначається так:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Матрицю також можна позначати і іншими буквами: B, C і т. д. Слід мати на увазі, що матриця – це **таблиця** чисел, тому, наприклад, вираз $A=5$ не має змісту.

У скороченому вигляді матрицю можна записати таким чином:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{mn} \text{ або } A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, \text{ або } A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \text{ або } A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}.$$

Дві матриці однакових розмірів з рівними відповідними елементами називають **рівними** між собою.

Матриця називається **нульовою**, якщо всі її елементи – нулі. Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{– нульова матриця розміру} [2\times 3].$$

Матриця, яка складається із одного стовпця, називається **стовпцевою.** Вона має розмір $[m\times 1]$ і наступний вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Матриця, яка складається із одного рядка, називається **рядковою**. Її розмір $[1\times n]$, а вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Якщо замінити у матриці рядки на стовпці так, щоб перший рядок став першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем і т. д., то дістанемо матрицю, яку називають **транспонованою** матрицею і позначають через A^T, тобто якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Якщо розмір матриці A:$[m \times n]$, то розмір матриці A^T : $[n \times m]$

Елемент рядка будемо називати **крайнім**, якщо він не дорівнює нулю, а всі елементи цього рядка, які знаходяться ліворуч від нього дорівнюють нулю.

Матриця називається **ступінчатою**, якщо крайній елемент кожного рядка знаходиться праворуч крайнього елемента попереднього рядка.

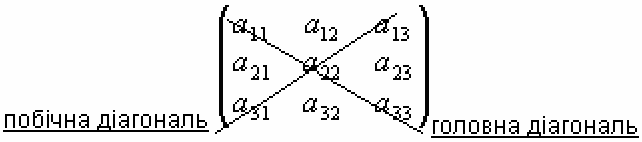
Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається **квадратною** матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її **порядком**. Тобто матриця A має порядок n. Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ складають так звану **головну** діагональ, а елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{n1}$ – складають **побічну** діагональ.

Наприклад, у матриці третього порядку



елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} складають головну діагональ, а елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} – побічну.

Якщо в **квадратній** матриці всі елементи, розміщені поза головної діагоналі – нулі, то матриця називається **діагональною**.

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ – діагональна матриця третього порядку.

Діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називається **одиничною**. Одинична матриця позначається буквою E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – одинична матриця четвертого порядку.

Нагадаємо, що діагональні, а тому, і одиничні матриці бувають тільки у квадратних матриць.

2. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

2.1. Додавання матриць

Сумою двох матриць **однакових** розмірів називається матриця такого самого розміру, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць, які додаються. Тобто сумою матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ однакового розміру називається матриця $C=(c_{ij})$ того ж розміру, причому $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \forall i,j$.

Наприклад

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $C=A+B$ буде дорівнювати:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Властивості операції додавання матриць

Операція додавання підлягає переставному закону: $A+B=B+A$.

Крім того, легко помітити, що $A+0=A$, $0+A=A$, де 0 – нульова матриця.

Тобто нульова матриця в теорії матриць виконує ту саму роль, що і число нуль в арифметиці.

Аналогічним чином можна дати означення **різниці** двох матриць.

2.2. Перемноження матриць

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ на число λ називається матриця $B=(b_{ij})$ того ж розміру, що і A, елементами якої є добутки елементів матриці A на число λ, тобто $b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$, $\forall\ i,j$.

Властивості операції множення матриці на число: (λ і μ – числа)

$$\lambda\cdot(\mu A)=(\lambda\cdot\mu)\cdot A$$

$$\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$$

$$(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A\ .$$

Помітимо, що коли $\lambda = 0$, то добуток $A \cdot 0$ дорівнює нульовій матриці.

2.3. Добуток двох матриць

Дві матриці *A* і *B* називаються **узгодженими**, якщо число стовпців матриці *A* (першої матриці) дорівнює числу рядків матриці *B* (другої матриці).

Тобто, для того, щоб матриці *A* і *B* були узгодженими вони повинні мати розміри: $A = [m \times \underline{n}]$, $B = [\underline{n} \times p]$.

Добутком двох **узгоджених** матриць *A* і *B* називається третя матриця *C*, кожний елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*.

Помітимо, що з першої (лівої)матриці *A* використовують **тільки рядки**, а з другої (правої) матриці *B* – **тільки стовпці**. Формула знаходження елементів матриці *C* має вигляд

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, i = 1, 2, \ldots m; j = 1, 2, \ldots p.$$

Якщо розміри матриць *A* і *B* відповідно $[m \times n]$ і $[n \times p]$, то розмір матриці $C = A \cdot B$ буде дорівнювати $[m \times p]$.

Увага!

Перемножати можна тільки узгоджені матриці.

Приклад. Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування:

Матриця *A* має розмір $[2 \times 3]$, матриця *B* має розмір $[3 \times 4]$, тобто *A* і *B* узгоджені матриці. Кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*. Тоді матриця $C = A \cdot B$ буде мати розмір $[2 \times 4]$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо елемент c_{11}. Від матриці *A* візьмемо перший рядок, а від матриці *B* – перший стовпець: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, тоді

$$c_{11} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 5 = -2.$$

Для того, щоб знайти елемент c_{12}, від матриці A візьмемо перший рядок, а від матриці B – другий стовпець:

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 5.$$

Для того щоб знайти, наприклад, елемент c_{23} потрібно від матриці A взяти другий рядок, а від матриці B третій стовпець:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \underline{-1} & \underline{3} & \underline{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & \underline{1} & 4 \\ 0 & 1 & \underline{2} & -2 \\ 5 & 1 & \underline{0} & -1 \end{pmatrix},$$

$$c_{23} = (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 5.$$

Таким чином, після обчислення всіх елементів c_{ij}, одержимо матрицю C:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 6 \\ 21 & 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції множення матриць

Добуток матриць не має переставної властивості, тобто **не завжди** $A \cdot B = B \cdot A$. Якщо $AB = BA$, то матриці називають **переставними**.

Якщо A,B і C – матриці, які можна додавати, або перемножать, а λ – деяке число, то мають місце такі рівності:

$$\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B);$$

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Добуток матриці A на узгоджену з нею одиничну матрицю дорівнює матриці A

$$A \cdot E = A.$$

Добуток матриці A на узгоджену з нею нульову матрицю дорівнює нульовій матриці

$$A \cdot 0 = 0.$$

Питання на самоперевірку

1. Що називається матрицею?
2. Чи може матриця дорівнювати числу?
3. Яка матриця називається ступінчастою?
4. Чи може діагональна матриця бути прямокутною?
5. Яка матриця називається одиничною?
6. Які матриці називають узгодженими?
7. Що називається добутком двох узгоджених матриць?
8. Якщо $A \cdot B = B \cdot A$, то як називають такі матриці?
9. Чи можна перемножити квадратну матрицю на неквадратну?

Приклад 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайти: 1) $3A$; 2) $2A - 4B$; 3) $A + 2B^T$.

Р о з в ' я з у в а н н я :

1) $3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 9 & 3\end{pmatrix}$;

2) $2\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 6 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 16\\ -8 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -18\\ 14 & -18\end{pmatrix}$;

3) $B^T=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4\\ 8 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 11 & 11\end{pmatrix}$.

Приклад 2. Знайти добуток матриць.

1) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 4\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Р о з в ' я з у в а н н я :

1. Перша і друга матриці мають розмірність $[2\times 2]$, тобто вони узгоджені, і матриця, яку ми одержимо буде того ж розміру (другого порядку).

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+(-2)\cdot(-1) & 1\cdot 4+(-2)\cdot 2\\ 3\cdot 0+(-3)\cdot(-1) & 3\cdot 4+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$$

2. Перша матриця квадратна, має розмірність $[3\times 3]$ (або третього порядку), друга матриця має розмірність $[3\times 1]$, тобто вони узгоджені. Матриця, яку ми одержимо повинна мати розмірність $[3\times 1]$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 4\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 1+(-3)\cdot(-2)\\ 2\cdot 2+1\cdot 1+4\cdot(-2)\\ (-2)\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ -3\\ -4\end{pmatrix}.$$

3. Розмірність першої матриці $[4\times 1]$, другої $[1\times 4]$, вони узгоджені і ми одержимо матрицю розміру $[4\times 4]$.

$$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 4 & 1\cdot 1 & 1\cdot(-2) & 1\cdot 1\\ 2\cdot 4 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 1\\ (-1)\cdot 4 & (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot 1\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2 & 1\\ 8 & 2 & -4 & 2\\ -4 & -1 & 2 & -1\\ 12 & 3 & -6 & 3\end{pmatrix}.$$

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

Знайти: 1) $(-2)\cdot A$; 2) $3A^T+2B$.

Приклад 2. Знайти добуток матриць:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Чи можна помножити матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \\ -1 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$?

Приклад 4. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо:

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Домашнє завдання

Приклад 1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Знайти: 1) $\frac{1}{4} \cdot A$; 2) $2A^T - 3B$.

Відповідь: 1) $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 11 & -16 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Знайти добуток матриць.

1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: 1) $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 17 & 21 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 30 & -2 \end{pmatrix}$ (зауваження: $f(A) = 2A^3 - A^2 + 3E$, де E – одинична матриця другого порядку).

3. ВИЗНАЧНИКИ

З кожною **квадратною** матрицею A n-го порядку пов'язують її числову характеристику, яка називається **визначником**, або детермінантом цієї матриці.

Визначник матриці A позначається так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Іноді, замість $\det A$ пишуть Δ_A, або просто Δ.

Детермінант так само, як і матриця, має порядок. Він дорівнює порядку матриці.

Розглянемо матрицю другого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначником другого порядку називається число (або вираз), яке обчислюється за формулою

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

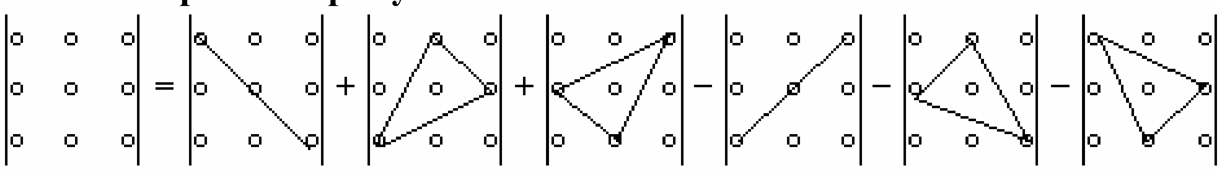
Нагадаємо, що елементи a_{11}, a_{22} утворюють головну діагональ, а елементи a_{21}, a_{12} – побічну діагональ. Тому, для того, щоб обчислити визначник другого порядку потрібно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за формулою

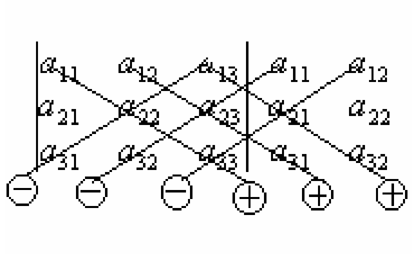
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

Формула обчислення на перший погляд складна, тому краще запам'ятати, так зване **правило трикутників**:



Крім правила трикутників можна користуватися **правилом приписування стовпців**: до визначника приписують елементи першого і другого стовпців. Добутки елементів, що розміщені на головній діагоналі і на діагоналях їй паралельних, беруться зі знаком «плюс». А добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі і на діагоналях, їй паралельних, беруться зі знаком «мінус».



Приклад. Обчислити визначник за допомогою правила трикутників і правила приписування стовпців.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування:

Обчислимо визначник за допомогою правила трикутників.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 3 + 1\cdot(-2)\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot(-1) - 4\cdot 5\cdot(-1) - 3\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot(-2)\cdot 2 = 34.$$

Тепер обчислимо визначник за допомогою правила приписування стовпців.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right. = 2\cdot 5\cdot 3 + 1\cdot(-2)\cdot 4 + (-1)\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 5\cdot(-1) -$$

$$-1\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 1 = 34.$$

Властивості визначників

1. Величина визначника не зміниться, якщо всі його рядки замінити стовпцями, причому кожний рядок замінити стовпцем з тим же номером.

2. Якщо поміняти місцями два рядка (стовпця), то визначник поміняє знак на протилежний.

3. Визначник, який має два однакових рядка (стовпця) дорівнює нулю.

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Висновок. Якщо всі елементи, якого-небудь рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то і визначник дорівнює нулю (для перевірки цього висновку достатньо розглянути властивість 4 при $\lambda = 0$).

5. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

Цю властивість можна рахувати наслідком властивостей 3 і 4.

6. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких рядками (стовпцями) є відповідні доданки, а решта збігається із рядками (стовпцями) даного визначника.

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число.

Дійсно, розглянемо два визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доведемо, що $\Delta_1 = \Delta_2$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Другий визначник дорівнює нулю, тому що} \\ \text{у нього перший і третій стовпці рівні,} \\ \text{див. властивість 3.} \end{array} \right\} =$$

$$= \Delta_1 + \lambda \cdot 0 = \Delta_1.$$

3.1. Мінори і алгебраїчні доповнення визначника

Розглянемо визначник *n*-го порядку. Викреслимо в ньому елементи *i*-го рядка і *j*-го стовпця. Помітимо, що на їх перехресті міститься елемент a_{ij}.

Означення 3.1. **Мінором** M_{ij} елемента a_{ij} визначника *n*-го порядку, називається **визначник** (*n*-1)-го порядку, який складається із не викреслених елементів визначника.

Наприклад, мінором M_{32} елемента a_{32} визначника третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

буде визначник другого порядку $M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{23}-a_{13}\cdot a_{21}$.

З поняттям мінора M_{ij} зв’язане поняття алгебраїчного доповнення.

Означення 3.2. Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} дорівнює мінору M_{ij} того ж елемента, якщо (i+j) – число парне, і дорівнює $-M_{ij}$, якщо (i+j) – число непарне.

Тобто, формулу обчислення алгебраїчного доповнення можна записати таким чином:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Приклад 1. Обчислити M_{12}, A_{12}, M_{31}, A_{31}, якщо заданий визначник третього порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

Розв’язування:

Для того, щоб знайти M_{12}, потрібно у визначнику Δ викреслити перший рядок і другий стовпець, тоді:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-4)-3\cdot(-3)=4+9=13.$$

Алгебраїчне доповнення A_{12} від мінора M_{12} буде відрізнятися тільки знаком. Дійсно i+j=1+2=3 – число непарне, тому $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-13$.

Знайдемо мінор M_{31}. Зразу ж помітимо, що $i+j=3+1=4$ – парне число, тому $M_{31}=A_{31}$. Викреслимо третій рядок і перший стовпець.

$$M_{31}=A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-5\cdot 4=-3-20=-23.$$

Тепер розглянемо ще одну формулу, за допомогою якої можна обчислити визначник третього порядку.

Значення визначника дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\det A=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\ ,\ \ j=1,2,3. \qquad (1)$$

Формулу (1) називають розкладанням визначника за елементами рядка (стовпця).

Для визначника третього порядку існує шість формул виду (1) обчислення детермінанту (три рядка + три стовпця). Наприклад, розкладемо (обчислимо) визначник за елементами другого рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}.$$

А тепер розкладемо визначник за елементами третього стовпця.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}.$$

Таким чином, щоб обчислити (розкрити) визначник третього порядку можна використати три правила: правило трикутників, правило приписування стовпців і правило розкладання за елементами якого-небудь рядка (стовпця).

Визначники порядку вище третього можна обчислювати тільки по правилу розкладання за елементами рядка (стовпця). Цей метод дає можливість обчислення визначника n-го порядку звести до обчислення n визначників (n-1)-го порядку. Очевидно, що обчислення визначника можна скоротити, якщо розкладати його за елементами рядка (стовпця), у якого деякі елементи дорівнюють нулю.

Розглянемо «метод утворення нулів».

Він ґрунтується на використанні властивості 7.

Приклад 2. Утворити нулі в якому-небудь рядку (стовпцю).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування:

Помітимо, що простіше утворювати нулі в тому рядку (стовпці), де маємо елемент 1 (або -1). Виберемо перший стовпець.

Елементи першого рядка помножимо на -3 і відповідно додамо до елементів другого рядка (значення визначника не зміниться).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 7 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Потім перший рядок помножимо на 2 і додамо до елементів третього рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 7 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

І, нарешті, перший рядок помножимо на –4 і додамо до елементів четвертого рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 7 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & -6 & 10 & 13 \end{vmatrix}$$

В першому стовпці одержали три нулі. Ясно, що розкривати одержаний визначник зручно за першим стовпцем.

Питання на самоперевірку

1. Чим відрізняється поняття матриці від поняття визначника?
2. Чи може матриця розміру $[2 \times 3]$ мати визначник?
3. Запишіть правило трикутників.
4. Що буде з визначником, якщо поміняти місцями два стовпця?
5. Що таке мінор M_{ij}?
6. Чим відрізняється мінор M_{ij} від алгебраїчного доповнення A_{ij}?
7. Перелічіть формули, за допомогою яких можна обчислити визначник третього порядку.
8. За яким правилом обчислюються визначники, які мають порядок вище третього?

Приклад 1. Обчислити визначник другого порядку. $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot (-\sin\varphi) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} x+5 & 2 \\ 2x+1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язування:

$$\begin{vmatrix} x+5 & 2 \\ 2x+1 & 3 \end{vmatrix} = (x+5)\cdot 3 - 2(2x+1) = 3x + 15 - 4x - 2 = 0;$$

$$-x + 13 = 0;$$

$$x = 13.$$

Приклад 3. Обчислити визначник за допомогою:
1) правила трикутників;
2) правила приписування стовпців;
3) правила розкладання за елементами рядка (стовпця).

Розв'язування:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 7\cdot 0 + (-1)\cdot 4\cdot 5 - 5\cdot 2\cdot 0 - 7\cdot 4\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 1 =$

$$= 4 + 0 - 20 - 0 - 56 + 3 = -69.$$

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right| = 2\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 4\cdot 5 + 0\cdot 3\cdot 7 - 0\cdot 2\cdot 5 -$

$$-2\cdot 4\cdot 7 - (-1)\cdot 3\cdot 1 = -69.$$

3) розкладемо визначник за третім стовпцем (можна за першим рядком) так як в цьому стовпці є нуль.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{13} + 4\cdot A_{23} + 1\cdot A_{33} = 4\cdot(-1)^{2+3}\cdot M_{23} + 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot M_{33} =$$

$$= -4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4)\cdot\left[2\cdot 7 - 5\cdot(-1)\right] + 2\cdot 2 - 3\cdot(-1) = -76 + 4 + 3 = -69.$$

Приклад. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язування:

Скористаємося правилом «трикутників».

$$2\cdot 7\cdot 6 + 0\cdot(x-3)\cdot 5 + (-1)\cdot(-3)\cdot 3 - 5\cdot 7\cdot 3 - (-3)\cdot(x-3)\cdot 2 - (-1)\cdot 0\cdot 6 = 0;$$

$$84 + 9 - 105 + 6(x-3) = 0;$$

$$-12 + 6(x-3) = 0;$$

$$6(x-3) = 12;$$

$$x - 3 = 2;$$

$$x = 5.$$

Приклад. Користуючись властивостями визначників, обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} b & a^2+b^2 & 1 \\ c & a^2+b^2 & 1 \\ d & a^2+b^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування:

Спочатку скористаємося властивістю 6, потім властивістю 4, а потім властивістю 3.

$$\begin{vmatrix} b & a^2+b^2 & 1 \\ c & a^2+b^2 & 1 \\ d & a^2+b^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a^2 & 1 \\ c & a^2 & 1 \\ d & a^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b^2 & 1 \\ c & b^2 & 1 \\ d & b^2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад. Довести рівність: $\begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = 4x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

Розв'язування:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{Скористаємося} \\ \text{властивістю 4} \end{matrix} \right\} = 2 \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 1 \\ 2+x & 2-x & 2 \\ 3-x & 3+x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Додамо елементи другого стовпця до} \\ \text{відповідних елементів першого} \\ \text{стовпця (властивість 7; } \lambda\text{=1), а потім} \\ \text{знов скористаємося властивістю 4} \end{matrix} \right\} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1+x & 1 \\ 4 & 2-x & 2 \\ 6 & 3+x & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 3 & 3+x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Скористаємося властивістю 6,} \\ \text{а потім властивістю 3} \end{matrix} \right\} = 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 4 \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & -x & 2 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix} = 4x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$

Розв'язування:

Цей приклад можна розв'язати двома способами. Перший: вибрати рядок, або стовпець, де є нуль і розкласти визначник за вибраним рядком (стовпцем). Можна вибрати 1-й, 2-й або 3-й рядки; або 1-й, 2-й або 3-й стовпці. Другий спосіб: утворити в якому-небудь рядку (стовпці) якнайбільше нулів і розкласти визначник по цьому рядку (стовпцю). Розглянемо обидва способи.

I спосіб. Розкладемо визначник, наприклад, за третім рядком:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$=2\cdot[-6-8-30-16]+[2-4-2-20]-3\cdot[-4-3-15]=-120-24+66=-78.$$

ІІ спосіб. Виберемо перший стовпець і утворимо в ньому нулі (за допомогою 7 властивості).

$$\begin{array}{r}(-2)\cdot\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 5 & -4 & 2\end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{елементи першого рядка}\\ \text{помножимо на (-2) і додамо}\\ \text{до елементів третього рядка}\end{array}\right\}=$$

$$=\begin{array}{r}(-1)\cdot\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 5 & -4 & 2\end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{елементи першого рядка}\\ \text{помножимо на (-1) і додамо}\\ \text{до елементів четвертого рядка}\end{array}\right\}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 6 & -4 & 0\end{vmatrix}.$$

А тепер розкладемо визначник за першим стовпцем.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 6 & -4 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -1\\ 6 & -4 & 0\end{vmatrix}=-18-32-24-4=-78.$$

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Обчислити визначники: 1) $\begin{vmatrix}x & xy\\ 1 & y\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$.

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 5 & -1\\ 4 & 7 & 3\end{vmatrix}$ за допомогою:

1) правила трикутників;
2) правила приписування стовпців;
3) правила розкладання за елементами якого-небудь рядка (стовпця).

Приклад 1. Розв'язати рівняння і нерівність: $\begin{vmatrix}1 & 3 & x\\ 4 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}2 & x+2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 5 & -3 & x\end{vmatrix}>0.$

Приклад 2. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 5 & 3\end{vmatrix}$.

Приклад 3. Обчислити визначник за допомогою властивостей визначника.

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

Домашнє завдання

Приклад 1. Обчислити визначники:

$$1)\ \begin{vmatrix} x^2 & x \\ xy^2 & y^2 \end{vmatrix},\ 2)\ \begin{vmatrix} \sqrt{x} & -1 \\ x & \sqrt{x} \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1) 0;   2) $2x$.

Приклад 2. Обчислити визначник за допомогою: 1) правила трикутників; 2) правила приписування стовпців; 3) правила розкладання за елементами якого-небудь рядка (стовпця).

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: –116.

Приклад 3. Розв'язати рівняння і нерівність.

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\quad 2)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$$

Відповідь: 1) $x_1 = 2,\ x_2 = -10$; 2) $x>3{,}5$.

Приклад 4. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Відповідь: 52.

Приклад 5. Обчислити визначник за допомогою властивостей визначника:

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 0.

4. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо **квадратну** матрицю *A*.

Означення 4.1. Квадратна матриця A називається **невиродженою**, якщо її визначник не дорівнює нулю, тобто $\det A \neq 0$.

Нехай матриця *A* буде квадратною і невиродженою.

Означення 4.2. Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці *A*, якщо виконуються рівності:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \qquad (2)$$

Розглянемо алгоритм знаходження оберненої матриці:

1. Обчислюємо визначник матриці (він не повинен дорівнювати нулю; якщо $\det A = 0$ – матриця A вироджена і обернену матрицю для неї знайти неможливо).

2. Складаємо матрицю із алгебраїчних доповнень до елементів даної матриці.

3. Одержану матрицю транспонуємо, позначаємо $\overline{A}$ і називаємо **приєднаною**.

4. Обчислюємо обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A} \qquad (3)$$

Таким чином, якщо матриця A квадратна і невироджена, то вона завжди має обернену матрицю.

Тепер розглянемо так звані матричні рівняння.

$$A \cdot X = B.$$

В цьому рівнянні припускається, що матриці A і X можна множити. X – невідома матриця. Так як $X \neq \frac{B}{A}$ (в лінійній алгебрі немає дії ділення матриці на матрицю), то підемо іншим шляхом. Помножимо рівність $A \cdot X = B$ на матрицю A^{-1} (зліва): $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Тоді $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, або $X = A^{-1} \cdot B$.

Аналогічно можна знайти X із рівняння $X \cdot A = B$. Тут множимо рівність на A^{-1} (праворуч): $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, або $X \cdot E = B \cdot A^{-1}$ і $X = B \cdot A^{-1}$.

Розглянемо ще одне рівняння $A \cdot X \cdot C = B$.Знайдемо *X*.

Спочатку помножимо рівняння на A^{-1} (ліворуч):

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot C = A^{-1} \cdot B, \text{ або } X \cdot C = A^{-1} \cdot B.$$

Потім множимо рівняння на C^{-1} (праворуч):

$$X \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}, \text{ або } X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

Нагадуємо, що добуток матриць не має переставної властивості, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Питання на самоперевірку

1. Яка матриця називається невиродженою?
2. Чи може матриця *A* розміром $[3 \times 4]$ мати обернену матрицю?
3. Яким умовам повинна задовольняти матриця *A*, щоб мати обернену матрицю?

4. Яка матриця називається приєднаною?
5. Сформулюйте алгоритм знаходження оберненої матриці.
6. Як розв'язується матричне рівняння $X \cdot C = A$?

Приклад 1. Знайти матрицю, обернену заданій матриці A: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування:

Користуємося сформульованим алгоритмом:
1. Обчислюємо визначник матриці:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 2 + 4 - 6 - 3 - 12 = 12 \neq 0 .$$

Матриця A невироджена, тому проводимо обчислення далі.
2. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Із алгебраїчних доповнень складаємо матрицю $\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Одержану матрицю транспонуємо: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Нагадуємо, що матрицю $\overline{A}$ називають приєднаною.
4. Скористуємося формулою (3):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Зауваження. Матрицю A^{-1} можна залишити в такому вигляді, а можна кожний елемент матриці помножити на число $\frac{1}{12}$:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{8}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{4}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{4}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

Такий вираз є більш громіздким, тому краще записати відповідь у вигляді (4). У розглянутому прикладі завжди можна зробити перевірку. Для цього використаємо рівності (2). Перевіримо, наприклад, рівність $A\cdot A^{-1}=E$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3\cdot 8+2\cdot(-4)+1\cdot(-4) & 3\cdot(-5)+2\cdot 7+1\cdot 1 & 3\cdot(-1)+2\cdot(-1)+1\cdot 5 \\ 2\cdot 8+3\cdot(-4)+1\cdot(-4) & 2\cdot(-5)+3\cdot 7+1\cdot 1 & 2\cdot(-1)+3\cdot(-1)+1\cdot 5 \\ 2\cdot 8+1\cdot(-4)+3\cdot(-4) & 2\cdot(-5)+1\cdot 7+3\cdot 1 & 2\cdot(-1)+1\cdot(-1)+3\cdot 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Розв’язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Розв’язування:

Маємо рівняння виду $A\cdot X=B$, де

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тоді X – буде дорівнювати $X=A^{-1}\cdot B$.

Тобто, для розв’язання нам потрібно знайти A^{-1}, а потім помножити A^{-1} на B.

Знайдемо A^{-1}.

$$\det A=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-3)=-3\,;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 2=-2\,;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 2=-2\,;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot(-1)=-1\,.$$

Утворимо матрицю з алгебраїчних доповнень і потім транспонуємо її:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\overline{A}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю: $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Знайдемо шукану матрицю X:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-2)+2\cdot 1 & 3\cdot 3+2\cdot(-4) \\ 2\cdot(-2)+1\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Знайти матриці, обернені даним. Зробити перевірку.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Розв'язати матричні рівняння:

1) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Домашнє завдання

Приклад 1. Знайти матриці, обернені даним. Зробити перевірку.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: 1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Розв'язати матричні рівняння.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: 1) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. РАНГ МАТРИЦІ

У розд. 3 було розглянуто поняття мінора M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку. Але поняття мінора можна ввести і для матриці.

Означення 5.1. Мінором k-го порядку M_k матриці A називається **визначник**, утворений із елементів матриці, які розташовані на перетині деяких k рядків і k стовпців.

Якщо розмір матриці $[m \times n]$, то k не перевищує меншого із чисел m і n.

Наприклад, в матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ можна вказати такі мінори:

– першого порядку: всі елементи матриці;

– другого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ і т. д.;

– третього порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ і т. д.

Означення 5.2. Рангом матриці A називається найбільший із порядків її мінорів, що не дорівнюють нулю.

Тобто, якщо матриця A має відмінний від нуля мінор (визначник) порядку r, а **всі** мінори вищого порядку (якщо вони є) дорівнюють нулю, то число r називається рангом матриці A.

Ранг матриці A позначається таким чином: $r(A)$, або $\mathrm{rang}A$, або $\mathrm{Rg}A$, або r.

Ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює одиниці, $r(A)=1$, тому що всі мінори другого порядку дорівнюють нулю.

Ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ дорівнює 2, так, як існує мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5$, який не дорівнює нулю, а мінорів третього порядку у матриці A немає.

Ранг нульової матриці за означенням вважають рівним нулю.

Для визначення рангу матриці використовують:

1) метод обвідних мінорів;
2) метод елементарних перетворень.

5.1. Метод обвідних мінорів

Цей метод полягає в наступному:

1. Находимо який-небудь мінор M_1 першого порядку (тобто елемент матриці) відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 0$ (матриця A – нульова).

2. Обчислюємо мінори другого порядку, які містять в собі M_1 (обводять M_1) до тих пір, поки не знайдеться мінор M_2 відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 1$, якщо є, то $r(A) \geq 2$. І т. д.

k. Обчислюємо мінори k-го порядку, якщо вони існують, які обводять мінор $M_{k-1} \neq 0$. Якщо таких мінорів немає, або вони всі дорівнюють нулю, то

$r(A)=k-1$, якщо хоча б один мінор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$ і т. д.

При знаходженні рангу матриці таким способом достатньо на кожному кроці знайти всього один ненульовий мінор k-го порядку, причому шукати його потрібно тільки серед мінорів, які обводять мінор $M_{k-1} \neq 0$.

5.2. Метод елементарних перетворень

До елементарних перетворень належать такі операції над матрицею:

1) переставлення двох рядків (стовпців);

2) множення рядка (стовпця) на число відмінне від нуля;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помножених на деяке число (яке не дорівнює нулю).

Матриці, які ми одержуємо за допомогою елементарних перетворень, називаються **еквівалентними** і позначаються знаком $\sim$. В подальшому будемо розглядати елементарні перетворення тільки над рядками.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Теорема 2. Ранг ступінчатої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

Ненульовий рядок – це рядок, який містить в собі хоча б один елемент, який не дорівнює нулю.

Помітимо, що ранг матриці не зміниться, якщо її транспонувати.

Означення 5.3. Ранг матриці дорівнює рангу ступінчатої матриці, яка одержана із даної матриці за допомогою елементарних перетворень.

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає в наступному:

1. Матрицю A, за допомогою елементарних перетворень приводимо до ступінчатого виду;

2. Підраховуємо число ненульових рядків одержаної ступінчатої матриці. Це число і буде рангом даної матриці A.

Питання на самоперевірку

1. Що називається мінором k-го порядку матриці?
2. Сформулюйте два означення рангу матриці.
3. Які методи використовуються для обчислення рангу матриці?
4. Які перетворення над матрицею називають елементарними?
5. Чому дорівнює ранг ступінчатої матриці?
6. Чи зміниться ранг матриці, якщо її транспонувати?
7. Чи може ранг матриці дорівнювати нулю? Бути менше нуля? Дорівнювати 4,5?

Приклад 1. Знайти ранг даної матриці методом обвідних мінорів.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & -5 & -6\\ 1 & -3 & -4 & -7\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з у в а н н я :

Нагадуємо, що при обчисленні рангу матриці потрібно переходити від мінорів менших порядків до мінорів вищих порядків. Якщо вже знайдено мінор k-го порядку, який не дорівнює нулю, то далі потрібно обчислювати лише мінори $(k+1)$-го порядку, що обводять цей мінор. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

Вибираємо, наприклад, мінор першого порядку $M_1 = a_{11} = 1 \neq 0$. Розглянемо мінор другого порядку, що обводить мінор M_1:

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix} = -9.$$

Тепер переходимо до обчислення мінорів 3-го порядку, які обводять мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & -1 & -5\\ 1 & -3 & -4\end{vmatrix} = 4-10-12+1+32-15=0;$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & -6\\ 1 & -3 & -7\end{vmatrix} = 7-12-36+3-18+56=0;$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & -1 & -5\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} = 1-20+4+2+5+8=0;$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & -6\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0-24+12+6+6-0=0.$$

Всі чотири мінора, які обводять мінор другого порядку дорівнюють нулю. Помітимо, що мінор четвертого порядку обчислювати не потрібно, тому що він теж буде дорівнювати нулю.

Отже $r(A) = 2$.

Приклад 2. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з у в а н н я :

Спочатку, за допомогою метода елементарних перетворень, утворимо із матриці A ступінчату матрицю. Зручно, щоб елемент a_{11} дорівнював одиниці. У даному випадку це неважко зробити: достатньо вжити елементарне перетворення 1: переставити перший і третій рядки.

Нагадаємо, що в ступінчатій матриці елементи, які розташовані нижче головної діагоналі повинні дорівнювати нулю.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & -3 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Далі, за допомогою елементарних перетворень, одержимо матрицю, у якої елементи в першому стовпці $a_{21}=4$ і $a_{31}=1$ будуть дорівнювати нулю. Для цього елементи першого рядка помножимо на (-4) і додамо до відповідних елементів другого рядка (результат запишемо в другий рядок), а потім елементи першого рядка помножимо на (-3) і додамо до елементів третього рядка (результат запишемо в третій рядок).

$$\begin{array}{c}(-4)\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & -3 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}(-3)\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -15 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -15 & 3\\ 0 & -10 & 2\end{pmatrix}$$

Тепер потрібно зробити так, щоб елемент a_{32} дорівнював нулю. Тут є декілька варіантів подальшого розв'язування. Розглянемо один з них. Елементи другого рядка помножимо на $\left(-\frac{1}{3}\right)$, а третього на $\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c} \\ (-1/3)\\ 1/2\end{array}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -15 & 3\\ 0 & -10 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & -5 & 1\end{pmatrix}$$

Тепер елементи другого рядка додамо до елементів третього рядка і результат запишемо в третій рядок:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & -5 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Одержимо ступінчату матрицю:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Кількість ненульових рядків у ступінчатій матриці дорівнює 2. За теоремою 2 ранг ступінчатої, а тому і ранг матриці A дорівнює 2, тобто $r(A)=2$.

Приклад 3. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язування:

Перетворимо матрицю A на ступінчату. Порядок перетворення такий: спочатку «утворюємо нулі» в першому стовпці, потім «утворюємо нулі» в другому стовпці і т. д.

$$A=\begin{array}{c}(-2)\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\2&1&-1&2&-3\\3&-2&-1&1&-2\\2&-5&1&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}(-3)\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&5&-3&4&-5\\3&-2&-1&1&-2\\0&-1&-1&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&5&-3&4&-5\\0&4&-4&4&-5\\0&-1&-1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\\4\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&-1&-1&0&0\\0&4&-4&4&-5\\0&5&-3&4&-5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\\5\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&-1&-1&0&0\\0&0&-8&4&-5\\0&5&-3&4&-5\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\\ \\(-1)\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&-1&-1&0&0\\0&0&-8&4&-5\\0&0&-8&4&-5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&0\\0&-1&-1&0&0\\0&0&-8&4&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Одержимо ступінчату матрицю, яка має три ненульових рядка. Тому ранг цієї матриці, а тому і ранг матриці A дорівнює 3: $r(A)=3$.

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Знайти ранг матриці: 1) за допомогою метода обвідних мінорів; 2) за допомогою метода елементарних перетворень.

$$1)\ \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&1&1\\1&3&4&1\end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix}1&2&-1&1&-3\\3&-1&1&6&11\\12&-1&-1&4&-3\end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\1&2&3&14&32\\4&5&6&32&77\end{pmatrix}.$$

Домашнє завдання

Приклад 2. Знайти ранг матриці:

1) за допомогою метода обвідних мінорів;

2) за допомогою метода елементарних перетворень.

$$1)\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\4&8&11\end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix}1&-2&3&1\\3&2&4&3\\5&-2&2&4\end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) $r=2$.; 2) $r=3$.

Приклад 3. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень.

$$1)\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) $r=3$; 2) $r=4$.

6. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (НЕОДНОРІДНІ)

Нехай задана система з m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{5}$$

де числа a_{ij} $(i=1,2\ldots m,\ j=1,2\ldots n)$ називають коефіцієнтами системи, а числа $b_1, b_2, \ldots b_m$ – вільними членами. Якщо $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ – система (5) називається однорідною (в протилежному випадку її називають неоднорідною). В цьому параграфі розглянемо неоднорідні системи.

Означення 6.1. Розв’язком системи (5) називається така сукупність чисел $(c_1, c_2, \ldots c_n)$, коли при заміні x_1 на c_1, x_2 на c_2 і т. д. кожне рівняння перетворюється на тотожність.

Якщо система має хоча б один розв’язок – вона називається **сумісною**. Система, яка не має ні одного розв’язку, називається **несумісною**. Сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має один розв’язок і **невизначеною** якщо вона має нескінченну кількість розв’язків.

Потрібно запам’ятати, що система (якщо вона сумісна) може мати або один розв’язок, або нескінченну кількість розв’язків.

Означення. Дві сумісні системи лінійних рівнянь з однаковою кількістю невідомих називаються **рівносильними** (**еквівалентними**), якщо вони мають однакові розв’язки.

Систему (5) можна записати в матричній формі:

$$A \cdot X = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця системи,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матриця – стовпець, складена з невідомих системи,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матриця – стовпець, складена з вільних членів системи.

Питання на самоперевірку

1. Що таке розв'язок системи лінійних рівнянь?
2. Яка система називається сумісною (несумісною)?
3. Дайте означення сумісної визначеної і сумісної невизначеної системи.
4. Чи може система мати два розв'язка?
5. Які системи називають еквівалентними (рівносильними)?
6. Як записати систему (5) в матричному вигляді?
7. Що таке матриця системи *A*?

Далі ми розглянемо три метода розв'язання системи (5): метод Крамера, матричний метод і метод Гаусса.

6.1. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Крамера

Цим методом можна розв'язувати системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Для спрощення, розглянемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{6}$$

Введемо наступні позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ – визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ – визначник, який ми одержали із визначника Δ заміною першого стовпця на стовпець вільних членів.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$ – заміна другого стовпця на стовпець вільних членів.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$ – заміна третього стовпця на стовпець вільних членів.

Невідомі x_1, x_2, x_3 знаходяться за, так званими, **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Записані формули використовуються для систем трьох рівнянь з трьома невідомими (систем виду (6)). Якщо ж система складається з двох рівнянь з двома невідомими, то формули Крамера будуть мати вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Якщо система має більше трьох невідомих, то розв'язувати її за допомогою формул Крамера недоцільно (наприклад, при $n = 4$ потрібно обчислити п'ять визначників четвертого порядку).

УВАГА!

Методом Крамера можна розв'язувати системи лінійних рівнянь, які задовольняють трьом умовам:

1) система повинна бути неоднорідною;
2) кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих;
3) визначник Δ не повинен дорівнювати нулю.

Питання на самоперевірку

1. Чи можна розв'язати систему трьох рівнянь з чотирма невідомими методом Крамера?
2. Запишіть формули Крамера для системи трьох рівнянь з трьома невідомими.
3. Яким умовам повинна задовольняти система лінійних рівнянь, щоб її можна було розв'язати методом Крамера?

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Розв'язування:

Система неоднорідна; кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Перевіримо третю умову – знайдемо Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 1 + 3 - 4 - 0 = 0.$$

Система не може бути розв'язана методом Крамера. Але це ще не значить, що система несумісна. Просто цю систему потрібно розв'язувати іншим методом. Цей метод ми розглянемо в розділі 6.3.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язування:

Перші дві умови виконуються. Знайдемо Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 4 + 2 - 6 - 3 - 12 = 12 \neq 0.$$

Цю систему можна розв'язати методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -72 - 2 - 3 + 3 + 8 + 18 = -48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -8 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -27 - 16 - 2 + 6 + 3 + 48 = 12$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 12 - 16 + 48 + 9 + 4 = 24$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-48}{12} = -4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{12} = 2.$$

Перевірка: $3 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 + 2 = -8$; $2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 + 2 = -3$; $2 \cdot (-4) + 1 + 3 \cdot 2 = -1$.

6.2. Розв'язання систем лінійних рівнянь матричним методом

Далі (для спрощення) розглянемо систему (6).

Запишемо її в матричному вигляді

$$A \cdot X = B, \tag{7}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця складена із коефіцієнтів при невідомих системи (6), розміром $[3 \times 3]$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих – матриця розміром $[3 \times 1]$.

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів – матриця розміром $[3 \times 1]$.

Помітимо, що три умови, які ми розглянули в §6.1 мають місце і тут. Знайдемо X із рівняння (7). Для цього помножимо рівняння (7) на A^{-1} зліва:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{, або } E \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{, або}$$

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{8}$$

Тобто зміст матричного методу полягає в тому, що, (див.(8)), спочатку знаходиться обернена матриця A^{-1}, а потім обчислюється добуток матриці A^{-1} на стовпець вільних членів *B*. Зазначимо, що матриці A^{-1} і *B* можна перемножать, оскільки як вони узгоджені.

Питання на самоперевірку

1. Запишіть систему трьох рівнянь з трьома невідомими в матричній формі. Що таке *X*, *B*? Чому дорівнює розмір цих матриць?
2. Як розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$? Тобто, як знайти *X*?

Приклад. Розв'язати систему рівнянь матричним методом.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування:

Система неоднорідна, кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Знайдемо Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 6 - 3 - 9 - 0 = -12 \neq 0.$$

Система може бути розв'язана матричним методом. Спочатку знайдемо A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці *A* ми вже обчислили: $\Delta_A = -12$. Тепер знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-9;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=7;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-3.$$

Утворимо матрицю із алгебраїчних доповнень і транспонуємо її. Одержимо приєднану матрицю $\overline{A}$:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}3 & -3 & -9\\ -5 & 1 & 7\\ -3 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Обчислимо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\cdot\overline{A}=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3 & -9\\ -5 & 1 & 7\\ -3 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

І, нарешті, за формулою (8) знайдемо X:

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3 & -9\\ -5 & 1 & 7\\ -3 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -5\\ 0\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}3\cdot1+(-3)\cdot(-5)+(-9)\cdot0\\ (-5)\cdot1+1\cdot(-5)+7\cdot0\\ (-3)\cdot1+3\cdot(-5)+(-3)\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}18\\ -10\\ -18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{5}{6}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix},\text{ тобто } x_1=-\frac{3}{2},\ x_2=\frac{5}{6},\ x_3=\frac{3}{2}.$$

Перевірка: $2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{2}=1,\ 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\frac{5}{6}-2\cdot\frac{3}{2}=-5,\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0.$

6.3. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса. Теорема Кронекера–Капеллі

Розглянемо метод, за допомогою якого можна розв’язати **будь-яку систему** (або довести її несумісність).

Розглянемо загальний випадок, коли кількість невідомих дорівнює n ,а кількість рівнянь дорівнює m, крім того умова, що $\Delta\neq0$ відкидається. Залишається одна умова: система рівнянь повинна бути неоднорідною. Отже, знову розглянемо систему (5). Нагадаємо, що матриця A – це матриця системи, яка складається із коефіцієнтів при невідомих.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Через B/A позначимо матрицю, яка дістається із матриці A приєднанням стовпця вільних членів:

$$
B/A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vline & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vline & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vline & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vline & b_m \end{pmatrix}.
$$

Матрицю B/A називають розширеною матрицею системи (5).

Теорема (*Кронекера-Капеллі*). *Система (5) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи, тобто* $r(A)=r(B/A)$.

Висновки: 1. Якщо $r(A)=r(B/A)=r=n$ (де n – число невідомих), то система сумісна і має один розв'язок.

2. Якщо $r(A)=r(B/A)=r<n$, то система сумісна і має нескінченну кількість розв'язків.

Помітимо, що коли $r(A)\neq r(B/A)$, то система (5) несумісна (розв'язків не має).

Очевидно, що зручніше, перш ніж розв'язувати систему (особливо, коли $m\neq n$), спочатку дослідити її на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі, а потім вже, у разі сумісності, знайти розв'язок системи.

Для дослідження систем лінійних рівнянь і знаходження їх розв'язків (у разі сумісності системи) будемо використовувати метод Гаусса.

1. Розв'язання починаємо із з'ясування питання про сумісність системи.

Для цього находимо $r(A)$ і $r(B/A)$ і порівнюємо їх:

– якщо $r(A)\neq r(B/A)$, то система несумісна (розв'язання закінчено). Цей варіант відповідає випадку, коли в деякому рядку матриці B/A всі елементи, крім останнього дорівнюють нулю;

– якщо $r(A)=r(B/A)$ – система сумісна і розв'язання продовжуємо.

2. Якщо $r(A)=r(B/A)=r=n$ система має єдиний розв'язок (матриця A має трикутний вид). Повертаємося до системи, яка відповідає ступінчатій матриці B/A і із останнього рівняння знаходимо x_n, потім, підставляючи його значення в передостаннє рівняння, знаходимо x_{n-1}. Аналогічним шляхом знаходимо $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_2, x_1$.

3. Якщо $r(A)=r(B/A)=r<n$, то система має нескінченну кількість розв'язків (у цьому випадку матриця A має трапецієподібний вид). Продовжуємо розв'язання таким чином: невідомі $x_1, x_2, \dots, x_n$ розділяємо на дві групи. r невідомих називаємо **базисними**, а останні $(n-r)$ – **вільними** невідомими. Як визначити, які невідомі назвати базисними, а які – вільними? Взагалі це не має значення. Зазвичай, перші r невідомих, тобто $x_1, x_2, \dots, x_r$ називають базисними, а останні $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – вільними. Але помітимо, що визначник, складений із коефіцієнтів при базисних невідомих **не повинен** дорівнювати нулю. Якщо він все ж дорівнює нулю, то можна, наприклад, поміняти місцями x_r і x_{r+1}, тобто x_r рахувати вільною, а x_{r+1} – базисною

невідомою. Після цього повертаємось до системи, яка відповідає ступінчатій матриці B/A і записуємо її таким чином, щоб базисні невідомі (разом зі своїми коефі-цієнтами) залишилися ліворуч, а вільні невідомі (із своїми коефіцієнтами) переносимо в рівняннях праворуч. Далі, починаючи з останнього рівняння, виражаємо базисну невідому (вона повинна бути в цьому рівнянні одна) через вільні невідомі. Потім, з передостаннього рівняння, находимо наступну базисну невідому і т. д.

Питання на самоперевірку

1. Яка матриця називається розширеною матрицею системи лінійних рівнянь?
2. Сформулюйте теорему Кронекера–Капеллі.
3. В якому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв’язок? Нескінченну кількість розв’язків?
4. Як називають систему у якої $r(A) \neq r(B/A)$?
5. Якщо $r(A) = r(B/A) = r = 3$, а $n = 5$, то скільки буде базисних невідомих і скільки вільних?

Приклад. Дослідити системи лінійних рівнянь. Якщо вони сумісні, то знайти їх розв’язок.

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -5; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$
3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 = 0; \\ 5x_1 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

Розв’язування:

1. Спочатку потрібно знайти ранги матриць *A* і *B/A*. Для спрощення, зазвичай, знаходження рангів об’єднують: складають розширену матрицю *B/A* (матриця *A* міститься в матриці *B/A*) і за допомогою елементарних перетворень зводять її до ступінчатого виду.

$$B/A = \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \\ \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \\ (-3) \\ 2 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -10 & 17 \\ 0 & 3 & -15 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{array}\right)$$

Матриці *A* і *B/A* зведені до ступінчатого виду:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}$, (нульовий рядок можна відкинути), $r(A) = 2$.

$B/A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{pmatrix}$, $r(B/A) = 3$.

Робимо висновок, що система несумісна: $r(A) \neq r(B/A)$ (ознака несумісності –

рядок, в якому всі елементи, за виключенням останнього, дорівнюють нулю).

2. Находимо ранги матриць A і B/A (для спрощення міняємо місцями перший і другий рядки – щоб елемент a_{11} дорівнював одиниці).

$$B/A=\begin{array}{r}(-1)(-3)(-2)\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\2&1&0&3&4\\3&0&1&-1&2\\2&0&1&1&3\\1&1&4&-3&-3\end{array}\right)\sim\begin{array}{r}\\(-2)(-3)\\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&-1&4&3&4\\0&-3&7&-1&2\\0&-2&5&1&3\\0&0&6&-3&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\begin{array}{r}\\ \\(-\frac{1}{5})\\(-1)\\\frac{1}{3}\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&-1&4&3&4\\0&0&-5&-10&-10\\0&0&-3&-5&-5\\0&0&6&-3&-3\end{array}\right)\sim\begin{array}{r}\\ \\(-2)(-3)\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&-1&4&3&4\\0&0&1&2&2\\0&0&3&5&5\\0&0&2&-1&-1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\begin{array}{r}\\ \\ \\ \\\frac{1}{5}\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&-1&4&3&4\\0&0&1&2&2\\0&0&0&-1&-1\\0&0&0&-5&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&-1&4&3&4\\0&0&1&2&2\\0&0&0&-1&-1\\0&0&0&-1&-1\end{array}\right),$$

(маємо два однакових рядка, тому один рядок можна відкинути; або інакше: четвертий рядок множимо на –1 і додаємо до п'ятого рядка – в результаті одержуємо останній нульовий рядок). Маємо: $r(A)=4$, $r(B/A)=4$. Система сумісна. Продовжуємо розв'язання.

Так як кількість невідомих $n=4$, то система має єдиний розв'язок. Повертаємось до системи, і записуємо її відповідно одержаної матриці B/A:

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0,\\ \quad -x_2+4x_3+3x_4=4,\\ \qquad\qquad x_3+2x_4=2,\\ \qquad\qquad\quad -x_4=-1.\end{cases}$$

Починаємо розв'язування цієї системи з останнього рівняння (метод оберненого ходу).

$$x_4=1.$$

Переходимо до передостаннього рівняння і т. д.

$$x_3+2x_4=2,\ \text{або}\ x_3+2\cdot1=2,\ x_3=0.$$

$$-x_2+4x_3+3x_4=4,\ \text{або}\ -x_2+4\cdot0+3\cdot1=4,\ x_2=-1.$$

$$x_1+x_2-2x_3=0,\ x_1-1-2\cdot0=0,\ x_1=1.$$

Таким чином: $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=1$.

Перевірка: $2\cdot1-1+3\cdot1=4$; $\quad 1-1-2\cdot0=0$; $\quad 3\cdot1+0-1=2$;
$2\cdot1+0+1=3$; $\quad 1-1+4\cdot0-3\cdot1=-3$.

3. Розв'язання аналогічне.

$$B/A = \begin{array}{c} (-5)(-4)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & -3 & 3 & \vdots & 3 \\ 5 & 0 & 3 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -10 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & -15 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & -15 & 3 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \sim \{\text{маємо три однакові рядки}\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -5 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -5 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$r(A) = r(B/A) = 2, \quad n = 3.$$

Система сумісна і має нескінченну кількість розв'язків.

Так як $r(A) = r(B/A) = r = 2$, то і базисних невідомих буде дві. Тоді кількість вільних невідомих буде дорівнювати $n - r = 3 - 2 = 1$. Нехай базисні невідомі x_1 і x_2, тоді x_3 буде вільною невідомою. Від останньої матриці повернемось до системи рівнянь. Базисні невідомі залишимо в лівій частині, а вільну невідому перенесемо праворуч:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ -5x_2 = -x_3 + 1 \end{cases} \tag{9}$$

Складемо визначник із коефіцієнтів при базисних невідомих.(для того, щоб продовжувати розв'язання, потрібно, щоб цей визначник не дорівнював нулю).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 0 \cdot 3 = -5 \neq 0.$$

Тепер із другого рівняння (метод оберненого ходу) системи (9) знайдемо базисну невідому x_2 (за допомогою вільної невідомої x_3):

$$-5x_2 = -x_3 + 1, \text{ або } x_2 = \tfrac{1}{5}x_3 - \tfrac{1}{5}.$$

Із першого рівняння знаходимо базисну невідому x_1:

$$x_1 + 3x_2 = 0, \text{ або } x_1 = -3x_2, \text{ або } x_1 = -3\left(\frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{5}.$$

Таким чином, розв'язок системи має вигляд:

$$x_1 = -\tfrac{3}{5}x_3 + \tfrac{3}{5}, \quad x_2 = \tfrac{1}{5}x_3 - \tfrac{1}{5}.$$

Надаючи вільній невідомій x_3 різні числові значення одержимо нескінченну кількість розв'язків. Наприклад:

Нехай $x_3 = 1$, тоді $x_1 = 0,\ x_2 = 0$.

Нехай $x_3 = 0$, тоді $x_1 = \tfrac{3}{5},\ x_2 = -\tfrac{1}{5}$ і т. д.

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера і матричним методом.

1) $\begin{cases} x+2y+3z=5; \\ 4x+5y+6z=8; \\ 7x+8y=2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=3; \\ x_1+3x_2+2x_3=-1; \\ x_1+x_2=5. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7; \\ x_1+2x_2-3x_3=14; \\ -x_1-x_2+5x_3=-18. \end{cases}$

Приклад 2. Дослідити системи лінійних рівнянь, для сумісних систем знайти розв'язки методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-5x_4=1; \\ x_1-x_2-5x_3=2; \\ 3x_1-2x_2-2x_3-5x_4=3; \\ 7x_1-5x_2-9x_3+10x_4=8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5; \\ 2x_1+3x_2+x_3=1; \\ 2x_1+x_2+3x_3=11; \\ 3x_1+4x_2-x_3=-5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=8; \\ 2x_1-x_2-4x_3+3x_4=1; \\ 4x_1-7x_2-18x_3+11x_4=-13; \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=9. \end{cases}$

Домашнє завдання

Приклад 1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера і матричним методом

1) $\begin{cases} 4x-3y+2z=9; \\ 2x+5y-3z=4; \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8; \\ 2x_1-4x_2-3x_3=-1; \\ x_1+5x_2+x_3=0. \end{cases}$

Відповідь: 1) $x=2, y=3, z=5.$ 2) $x_1=2, x_2=-1, x_3=3.$

Приклад 2. Дослідити системи лінійних рівнянь, для сумісних систем знайти розв'язки методом Гаусса.

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-13; \\ -x_1+x_3+2x_4=-1; \\ 3x_1+4x_2+5x_3=11; \\ 5x_1+6x_2+7x_3-2x_4=19. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z=3; \\ 2x-y+z=2; \\ x+4y+2z=5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3; \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7; \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$

Відповідь:

1) система сумісна і визначена: $x_1=-1, x_2=1, x_3=2, x_4=-2$;

2) система несумісна;

3) система сумісна і невизначена: $x_3=1-3x_1-4x_2$, $x_4=1$.

7. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ (ОДНОРІДНІ)

Нагадаємо, що коли в системі (5) $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система називається однорідною. В матричній формі однорідна система буде мати вид $A \cdot X = 0$. Однорідна система завжди сумісна ($r(A) = r(B/A) = r = n$), так як завжди має розв'язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (в цьому випадку визначник системи не дорівнює нулю). Цей розв'язок називають тривіальним. Однорідна система має нетривіальний (ненульовий) розв'язок, якщо $r<n$ (n – число невідомих). В цьому випадку система має нескінченну кількість розв'язків (визначник системи дорівнює нулю). Розв'язок однорідної системи здійснюється за допомогою метода Гаусса.

Питання на самоперевірку

1. Яка система називається однорідною?
2. Чи може однорідна система бути несумісною?
3. За якою умовою однорідна система має тільки нульовий розв'язок?, ненульовий розв'язок?

Приклад. Знайти розв'язки однорідних систем рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування:

1. Можна почати розв'язування системи із знаходження визначника системи. Якщо він не дорівнює нулю, то система буде мати тільки тривіальний розв'язок. Але ж, якщо визначник буде дорівнювати нулю, то потрібно буде знайти ранг матриці системи. Тому краще почнемо із знаходження рангу:

$$A = {}^{(-4)(-8)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim {}^{(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3$ і $n = 3$, тобто система має один розв'язок (тривіальний, нульовий). Повернемося до системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_3 = 0. \end{cases} \qquad \text{Звідси: } \begin{aligned} x_3 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Помітимо, що визначник системи не дорівнює нулю.

2. Приведемо матрицю системи до ступінчатого виду:

$$A = {}^{(-1)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A дорівнює 2, тобто $r = 2$, а $n = 4$, тому робимо висновок, що система має нескінченну кількість розв’язків. Маємо дві базисних і дві вільних невідомих. Нехай x_1 і x_2 будуть базисними, а x_3 і x_4 – вільними змінними. Запишемо відповідну систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2x_3 - 3x_4; \\ \quad 3x_2 = -2x_3 + 7x_4. \end{cases}$$

Складемо визначник із коефіцієнтів при базисних невідомих і обчислимо його (він не повинен дорівнювати нулю).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 .$$

Із останнього рівняння одержуємо x_2:

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 .$$

Тепер знаходимо $x_1 : x_1 = x_2 + 2x_3 - 3x_4$, або $x_1 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 + 2x_3 - 3x_4$, або $x_1 = \frac{4}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$.

Розв’язок системи має вигляд:

$$x_1 = \frac{4}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4,\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 .$$

Надаючи вільним змінним різні числові значення, одержимо нескінченну кількість розв’язків. Наприклад:

$x_3 = 0, x_4 = 3$, тоді $x_1 = -2, x_2 = 7$;

$x_3 = -1, x_4 = 2$, тоді $x_1 = -\frac{8}{3}, x_2 = \frac{16}{3}$ і т. д.

Завдання для аудиторної роботи

Приклад. Розв’язати однорідні системи лінійних рівнянь.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

Домашнє завдання

Приклад. Розв’язати однорідні системи лінійних рівнянь.

1) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Відповідь: 1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; 2) $x_1 = \dfrac{11}{7}x_3, x_2 = \dfrac{2}{7}x_3$.

Індивідуальні домашні завдання

1. Обчислити визначник:
   а) методом трикутників;
   в) методом приписування стовпців;
   с) методом розкладання за елементами деякого рядка (стовпця).
4. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A.
5. Визначити ранг матриці A.
6. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера. Зробити перевірку.
7. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом.
8, 9. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок (методом Гаусса).
10. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь.

Варіант 1

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначник, користуючись його властивостями: $\begin{vmatrix} x+3y & 1 & 3 \\ 5x+6y & 5 & 6 \\ 6x+7y & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити $3A^2 - 2A + 5$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -7; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 - 3x_3 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 7; \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -8; \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ x_1 + 5x_2 - 17x_3 + 2x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 2

1. $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$

2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} y+2 & 1 & 0 \\ 0 & y+1 & 0 \\ 0 & 0 & y-2 \end{vmatrix} = 0.$

3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3; \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 9, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ -2x_1 + x_3 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_3 + x_3 = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 3

1. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$

2. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 8-x & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0.$

3. Обчислити $2A \cdot B - 1$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix} 7 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.   5. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.   6. $\begin{cases} 3x_1-5x_2-5x_3=-8; \\ -4x_1+3x_2+4x_3=5; \\ x_1+2x_2+3x_3=-1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3; \\ -x_1-x_2-2x_3=1; \\ 2x_1+x_2+x_3=2. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=5; \\ 2x_1-x_2+x_3=2; \\ x_1+x_2+x_3=3. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3+x_4=2; \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=0; \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=1; \\ 3x_1+x_2-5x_3-x_4=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0; \\ 4x_1+5x_2+6x_3=0; \\ 7x_1+8x_2+9x_3=0. \end{cases}$

Варіант 4

1. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 4 & 6 & x & 6 \\ 2 & -3 & -3 & 5 \\ 2 & 9 & -11 & 0 \end{vmatrix}=0$.

3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.   5. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.   6. $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3=-2; \\ 2x_1-x_2-2x_3=4; \\ 3x_1+2x_2+3x_3=2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0; \\ 3x_1-x_2=5; \\ 2x_1-x_2+4x_3=15. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=-5; \\ 2x_1+x_2-9x_3=0; \\ 3x_1-x_2-x_3=2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=1; \\ -3x_1+x_2+x_3-2x_4=1; \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=-1; \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0; \\ 3x_1-9x_2-9x_3-10x_4=0; \\ 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=0. \end{cases}$

Варіант 5

1. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+10 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & x & -4 \end{vmatrix} < 0$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4; \\ 4x_1 - 9x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 7x_1 - 20x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 6

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Довести рівність, користуючись властивостями визначника:

$$\begin{vmatrix} c & c^2+1 & 1 \\ 2c & c^2+2 & 1 \\ 3c & c^2+3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Розв'язати матричне рівняння: $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 & -21 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & 2 & 7 & -8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases} x_1-5x_2-3x_3=10; \\ x_1+4x_2+2x_3=-3; \\ x_1+3x_2+x_3=-2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3=2; \\ 5x_1-7x_2-3x_3=-11; \\ 2x_1-9x_2+2x_3=-1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=3; \\ x_1+x_2=5; \\ x_1+3x_2+2x_3=-1. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3-x_4=-1; \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=1; \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=1; \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=-1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0; \\ 2x_1+5x_2+3x_3=0; \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0. \end{cases}$

Варіант 7

1. $\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \le 4$.

3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=2; \\ x_1+x_2-3x_3=-7; \\ 4x_1+3x_2-2x_3=-5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -4x_1+3x_2+4x_3=5; \\ 3x_1-5x_2-7x_3=-4; \\ -x_1+2x_2+3x_3=-1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+2x_2=3; \\ 2x_1+4x_2=-1; \\ -2x_1+3x_2=0. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+9x_4=-7; \\ 3x_1+5x_2+2x_3+12x_4=-1; \\ -x_1+3x_3-x_4=8; \\ 3x_1+6x_2+x_3+17x_4=-6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=0; \\ 2x_1-x_2-x_3=0; \\ 3x_1+4x_2-2x_3=0. \end{cases}$

Варіант 8

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Не розкриваючи визначників, довести справедливість рівності:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити $A \cdot B - 3$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_3 - 5x_3 = 8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 7; \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 23x_4 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 31x_4 = -35; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 11. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 9

1. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 10 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати нерівність: $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & x \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} > 2$.

3. Обчислити $A - B^2$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10; \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -5; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -7; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0; \\ 5x_1 + 3x_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1 - 6x_3 - 9x_4 = -8; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 28; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 22x_4 = -2; \\ 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 34x_4 = 18. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 10

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 5 & -3 & 8 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначник, користуючись властивостями: $\begin{vmatrix} x & x^2+1 & (x+1)^2 \\ y & y^2+1 & (y+1)^2 \\ z & z^2+1 & (z+1)^2 \end{vmatrix}$.

3. Знайти ABC, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -3; \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 = 0; \\ 7x_1 + 8x_2 = 0. \end{cases}$

Варіант 11

1. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & 13 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 6 & 3 & x-1 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 14 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3; \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 12

1. $\begin{vmatrix} 10 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначник, користуючись властивостями:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1+2\beta & 3+4\beta & 5+6\beta \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - 6x_3 = -1; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 14; \\ x_2 - 12x_3 - 35x_4 = 15; \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -14; \\ 4x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 35x_4 = -15. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 13

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 14

1. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ x & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Обчислити A^2-2B, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 5\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 1 & -1\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 7 & 11\\ 5 & 1 & 6 & 11\end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=1;\\ 2x_1-4x_2-x_3=-3;\\ x_1+3x_2+2x_3=6.\end{cases}$

7. $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=1;\\ 4x_1-3x_2-x_3=2;\\ 4x_1+2x_2+x_3=-8.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x_1+x_2=0;\\ x_1+x_2+x_3=-1;\\ 2x_1+2x_2=1.\end{cases}$

9. $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0;\\ x_1-x_2+2x_4=2;\\ x_2-x_3-x_4=-1;\\ x_1-x_3+x_4=1.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0;\\ 2x_1-3x_2+x_3=0;\\ 3x_1-2x_2+2x_3=0.\end{cases}$

Варіант 15

1. $\begin{vmatrix}9 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 7\end{vmatrix}$.

2.Обчислити визначник, використовуючи властивості: $\begin{vmatrix}2+3x & 2+5x & x\\ 2+3y & 2+5y & y\\ 2+3z & 2+5z & z\end{vmatrix}$.

3. Обчислити: $\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}4 & -3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & 1 & -8\\ 7 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=-12;\\ x_1+4x_2+3x_3=0;\\ 2x_1+2x_2+x_3=-2.\end{cases}$

7. $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=-4;\\ x_1-4x_2+x_3=-5;\\ 5x_1-2x_2+2x_3=-1.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=5;\\ x_1+x_2+5x_3=-7;\\ 2x_1+x_2+x_3=2;\\ 3x_1+4x_2+2x_3=7.\end{cases}$

9. $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=-1;\\ x_1-3x_2-3x_3+4x_4=-1;\\ 2x_1+3x_2-6x_3-x_4=-2;\\ 2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-2.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3=0;\\ 2x_1+x_2-4x_3=0;\\ 3x_1+4x_2-x_3=0.\end{cases}$

Варіант 16

1. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати нерівність: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0$.

3. Обчислити $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = -4x^2 + x + 3$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 3x_2 = -4; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 17

1. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=-1; \\ 3x_1-x_2+2x_2=3; \\ 4x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-4; \\ 3x_1-x_2-2x_3=3; \\ 3x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3=1; \\ 2x_1+10x_2+8x_3=3; \\ 3x_1+15x_2+12x_3=5. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1+2x_3-x_4=0; \\ 3x_1+x_2+6x_3-3x_4=3; \\ 4x_1-x_2+8x_3-4x_4=-3; \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0; \\ x_1+x_2+2x_3=0; \\ 4x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$

Варіант 18

1. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Довести рівність: $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}=0$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2-3x+7$.

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \\ -3 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6; \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16; \\ 5x_1+2x_2+x_3=16. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=8; \\ x_1-2x_2-3x_3=-8; \\ x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+3x_2-13x_3=-6; \\ 4x_1-x_2+x_3=3; \\ 2x_1-x_2+3x_3=3; \\ 5x_1+2x_2-12x_3=-3. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x_1-x_2-5x_3+5x_4=1; \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1; \\ x_1-2x_2+5x_4=2; \\ x_1+x_2-3x_3-x_4=-1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0; \\ x_1+2x_2+9x_3=0; \\ 3x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$

Варіант 19

1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

2.Обчислити визначник, користуючись властивостями: $\begin{vmatrix} 1 & x+4y & 4 \\ 2 & 2x+5y & 5 \\ 3 & 3x+8y & 8 \end{vmatrix}$.

3. Знайти добуток матриць $A \cdot A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 & -21 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & 2 & 7 & -8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 5; \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2; \\ x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = -11; \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -13. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 20

1. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 10 & 9 & -4 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 + 5x - 7$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 10; \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2; \\ 3x_1 - 4x_3 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5; \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = -1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 21

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 8 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -4 & x^2 & x \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \le 0$.

3. Знайти $A = 3B + C^T$, якщо $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 22

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

2.Розвязати рівняння: $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & x & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

3. Знайти добуток матриць: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0; \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 8; \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 11; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 23

1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & -2 \\ 10 & 11 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2x+3 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = -x^2 - 7x + 9$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & 2 & 7 & -8 \\ 0 & 2 & -13 & 4 & -10 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 9x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 24

1. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 5 \end{vmatrix}$.

2.Довести рівність: $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & 1 \\ ac & a^2+b^2 & 1 \\ ad & a^2+b^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. Знайти матрицю $AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$. 5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \\ -8 & 2 & -6 & -3 \\ 11 & -3 & 13 & 5 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 8; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7; \\ 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 3. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -4; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 11x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 25

1. $\begin{vmatrix} 5 & 9 & -7 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 5$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 17; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 13. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 26

1. $\begin{vmatrix} 3 & 10 & -8 \\ 7 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & x \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -1 & 3\\ 3 & -6 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases}3x_1+x_2-2x_3=-2;\\ 2x_1-x_2+x_3=-1;\\ 2x_1+3x_2-2x_3=6.\end{cases}$

7. $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=3;\\ 3x_1+x_2-x_3=2;\\ 4x_1+2x_2-5x_3=-7.\end{cases}$ 8. $\begin{cases}x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1;\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0;\\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1.\end{cases}$ 9. $\begin{cases}x_1+x_2+3x_3+4x_4=6;\\ 2x_1+x_2+3x_3+4x_4=7;\\ 7x_1+3x_2+6x_3+8x_4=17;\\ 3x_1+2x_2+4x_3+5x_4=9.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x_1+3x_2-4x_3=0;\\ 4x_1+5x_2+x_3=0.\end{cases}$

Варіант 27

1. $\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ 8 & 7 & 6\\ 5 & 4 & -2\end{vmatrix}$.

2.Довести рівність: $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & c+a\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}=0$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-3x+2$.

4. $A=\begin{pmatrix}8 & 1 & 2\\ -3 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 9\end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$. 6. $\begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3=-1;\\ 4x_1-5x_2-x_3=0;\\ x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$

7. $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1;\\ 3x_1+2x_2-3x_3=-2;\\ 4x_1+4x_2-5x_3=0.\end{cases}$ 8. $\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=5;\\ 2x_1-x_2-x_3=2;\\ 9x_1-2x_2-2x_3=-3.\end{cases}$ 9. $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1;\\ x_1+3x_2-13x_3-22x_4=-1;\\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=5;\\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=4.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0;\\ x_1+3x_2+4x_3=0;\\ 2x_1-x_2-x_3=0.\end{cases}$

Варіант 28

1. $\begin{vmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

2.Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$.

3. Знайти $A \cdot B - C^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -2; \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 = 0; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 29

1. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити, користуючись властивостями, визначник: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+1 \\ 1 & 2a & a^2+4 \\ 1 & 3a & a^2+9 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.   5. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$.   6. $\begin{cases} 4x_1+3x_2-2x_3=-5; \\ 3x_1+2x_2+x_3=2; \\ x_1+x_2+3x_3=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=-13; \\ x_1-4x_2+2x_3=1; \\ 4x_1-2x_2-x_3=3. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=3; \\ x_1+2x_2+9x_3=-1; \\ 3x_1+2x_2-x_3=5. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3-2x_4=-10; \\ 2x_1-x_2+x_3-5x_4=2; \\ 3x_1-5x_2+x_4=0; \\ x_1+x_2-3x_3-2x_4=-6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-x_4=0; \\ 2x_1-x_2+x_3-8x_4=0. \end{cases}$

Варіант 30

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити A^2-3B, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 8 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.   5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \\ 4 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.   6. $\begin{cases} 6x_1-4x_2-x_3=-5; \\ 5x_1-3x_2+2x_3=5; \\ x_1-x_2+3x_3=8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=8; \\ -x_1+5x_2+3x_3=-1; \\ 4x_1-6x_2-x_3=-4. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2; \\ 2x_1+x_2=5; \\ 3x_1+2x_2+x_3=7; \\ 5x_1+3x_2+3x_3=14. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=1; \\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=1; \\ 2x_1-x_2-2x_3+2x_4=-3; \\ x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+8x_4-6x_5=0; \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=0; \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4+3x_5=0. \end{cases}$

ПРИКЛАДИ ТЕСТІВ

Теоретичні питання

1. Матриця A – це:
   а) число; в) прямокутна таблиця чисел;
   с) визначник n-го порядку; d) додатне число.
2. Матриця називається нульовою, якщо:
   а) всі її елементи – нулі;
   в) сума всіх елементів дорівнює нулю;
   с) всі елементи якого-небудь рядка є нулі;
   d) всі елементи якого-небудь стовпця є нулі.
3. Квадратна матриця називається одиничною, якщо:
   а) всі її елементи одиниці;
   в) всі елементи якого-небудь рядка одиниці;
   с) елементи, які складають головну діагональ є одиниці;
   d) всі елементи матриці – одиниці.
4. Матриці не можна:
   а) додавати; в) віднімати; с) ділити; d) множити.
5. Дві матриці A і B називаються узгодженими, якщо:
   а) кількість рядків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B;
   в) кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B;
   с) кількість стовпців матриці A дорівнює кількості стовпців матриці B;
   d) кількість рядків матриці A дорівнює кількості стовпців B.
6. Якщо розмір матриці A $\left[m\times n\right]$, а розмір матриці B $\left[n\times p\right]$, то розмір матриці $C=AB$ дорівнює:
   а) $\left[p\times m\right]$; в) $\left[n\times p\right]$; с) $\left[m\times n\right]$; d) $\left[m\times p\right]$.
7. Визначник – це:
   а) квадратна таблиця чисел;
   в) прямокутна таблиця чисел;
   с) число, яке знаходиться за деякою формулою;
   d) число, яке не дорівнює нулю.
8. Якщо переставити два рядка (стовпця) визначника, то:
   а) значення визначника не зміниться;
   в) визначник змінить знак на протилежний;
   с) визначник буде дорівнювати нулю;
   d) визначник буде називатися транспонованим.
9. Якщо у визначника всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то:
   а) визначник буде дорівнювати нулю;
   в) знак визначника зміниться на протилежний;
   с) визначник не зміниться;
   d) визначник буде дорівнювати одиниці.
10. Якщо відповідні елементи деякого рядка(стовпця) визначника пропорційні, то:

a) визначник буде дорівнювати одиниці;
в) визначник буде дорівнювати нулю;
c) визначник буде дорівнювати -1;
d) визначник не зміниться.

11. За яким правилом обчислюються визначники, які мають порядок вище третього?
a) за правилом трикутників;
б) за правилом приписування стовпців;
c) за правилом розкладання за елементами якого-небудь рядка (стовпця);
d) за правилом приписування рядків.

12. Матриця A називається невиродженою, якщо:
a) вона квадратна;
в) вона прямокутна;
c) визначник матриці A є додатне число;
d) визначник матриці A не дорівнює нулю.

13. Матриця A має обернену, якщо вона:
a) квадратна; в) невироджена;
c) квадратна і невироджена; d) квадратна і вироджена.

14. Ранг ступінчатої матриці дорівнює:
a) одиниці; в) кількості ненульових рядків матриці;
c) кількості рядків матриці; д) нулю.

15. Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо:
a) її визначник дорівнює нулю; в) її визначник дорівнює одиниці;
c) вона має один розв'язок; d) вона має хоча б один розв'язок.

16. Неоднорідна система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, якщо:
a) ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи;
в) ранг матриці системи дорівнює одиниці;
c) ранг розширеної матриці системи дорівнює нулю;
d) ранг матриці системі менше рангу розширеної матриці системі.

17. Якщо $r(A) = r(B/A) = r = n$, то:
a) система несумісна;
в) система несумісна і має один розв'язок;
c) система сумісна і має один розв'язок;
d) система сумісна і має нескінченну кількість розв'язків.

18. Якщо $r(A) \neq r(B/A)$, то:
a) система сумісна і має один розв'язок;
в) система несумісна;
c) система сумісна і має нескінченну кількість розв'язків;
d) система має два розв'язка.

19. Матриці, які одержують одна із другої за допомогою елементарних перетворень називають:
a) еквівалентними; в) рівними;
c) оберненими; d) транспонованими.

20. Якщо система лінійних рівнянь однорідна, то:

а) $r(A) \neq r(B/A)$; в) $r(A) > r(B/A)$;

c) $r(A) < r(B/A)$; d) $r(A) = r(B/A)$.

Відповіді: 1) – в; 2) – а; 3) – с; 4) – с; 5) – в; 6) – d; 7) – с; 8) – в; 9) – а; 10) – в; 11) – с; 12) – d; 13) – с; 14) – в; 15) – d; 16) – а; 17) – с; 18) – в; 19) – а; 20) – d.

Розв'язування прикладів

1. Добуток двох матриць $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ дорівнює:

а) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 3$.

а) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$; д) 15.

3. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}$; д) -1.

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

а) 14; в) 0; с) -14; д) -7.

5. Обчислити алгебраїчне доповнення елемента a_{23} визначника $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

а) -1; в) 1; с) -3; д) 0.

6. Задана матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти обернену матрицю A^{-1}.

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

7. Чому дорівнює ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$?

а) $r(A) = 0$; в) $r(A) = 6$; с) $r(A) = 2$; д) $r(A) = 1$.

8. Чому дорівнює ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$?

а) $r(A)=5$; в) $r(A)=2$; с) $r(A)=1$; д) $r(A)=7$.

9. Чому дорівнює ранг матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$?

а) $r(A)=1$; в) $r(A)=5$; с) $r(A)=2$; д) $r(A)=3$.

10. Розв'язати систему методом Крамера $\begin{cases}x_1-3x_2=-1;\\ x_1+2x_2=4.\end{cases}$

У відповідь записати суму x_1+x_2.

а) 1; в) -3; с) 3; д) -1.

Відповіді: 1) – в; 2) – а; 3) – в; 4) – а; 5) – в;
6) – с; 7) – д; 8) – в; 9) – д; 10) – с.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М: Наука, 1980. – Т. 1.

2. Овчинников П. П. Вища математика / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К.: Техніка, 2000. – Ч. 1.

3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М: Наука,1987.

4. Смирнов В. М. Курс высшей математики. – М: Просвещение, 1974. – Т. 1.

5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М: Высш. шк., 1980. – Ч. 1.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Т. М. Бусарова, В. В. Кравець, Н. В. Міхєєва, В. О. Петренко

Модульне навчання

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 1

Редактор *М. О. Долгов*
Комп'ютерна верстка *Т. В. Шевченко*

Підписано до друку 25.04.2007. Формат 60х84 1/16. Папір для множних апаратів. Ризограф. Ум. друк. арк. 3,9. Обл.-вид. арк. 4,01.
Тираж 300 прим. Зам. № 731. Вид. № 67.

Видавництво Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна
ДК № 1315 від 31.03.2003
Адреса видавництва та дільниці оперативної поліграфії:
49010, Дніпропетровськ, вул. Лазаряна, 2
www.diitrvv.dp.ua
admin@diitrvv.dp.ua